

Olimpiada Republicană la Matematică

Prima zi, 2 martie 2019, Clasa a VII-a

Barem de evaluare

7.1. Demonstrați că există patru numere prime consecutive, care divid numărul $n = 2 + 2^2 + \dots + 2^{2028}.$		
Etapе ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etapе ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Stabilirea că $n : 2$.	1p.
2	Demonstrarea că $n : 3$.	2p.
3	Demonstrarea că $n : 5$.	2p.
4	Demonstrarea că $n : 7$.	2p.
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

7.2. Fie ABC un triunghi isoscel cu $AB = AC$ și $m(\angle BAC) = 72^\circ$. Pe latura AB se iau punctele D și E , astfel încât $\angle ACD \equiv \angle DCE \equiv \angle ECB$, iar punctul F aparține laturii (BC) , astfel încât EF este bisectoarea unghiului BEC . Demonstrați că $AF \perp CE$.		
Etapе ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etapе ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Deducerea că $\triangle ACE$ este isoscel.	2p.
2	Demonstrarea $\triangle AFB \equiv \triangle CFE$.	2p.
3	Obținerea că $m(\angle EFT) = 36^\circ$, unde $\{T\} = AF \cap CE$.	2p.
4	Obținerea $m(\angle ETF) = 90^\circ$.	1p.
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

7.3. Pe o tablă sunt scrise toate numerele naturale $1, 2, 3, \dots, 15$. Determinați numărul minim de numere ce pot fi șterse de pe tablă, astfel încât cu numerele rămase să formăm două mulțimi nevide de numere care verifică simultan următoarele proprietăți: a) ele nu au elemente comune; b) ele au același număr de elemente; c) produsul elementelor celor două mulțimi este același.		
Etapе ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etapе ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Reprezentarea produsului tuturor numerelor scrise pe tablă în formă de produs de factori primi.	1p.
2	Deducerea că produsul tuturor numerelor rămase trebuie să fie un pătrat perfect.	1p.

3	Deducerea că de pe tablă trebuie șterse numerele 10, 11, 13.	2p.
4	Construirea celor două mulțimi care verifică condițiile probleme, fiecare din ele având câte 6 elemente.	3p.
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

7.4. Fie expresia		
$E(a, b) = \frac{3}{a+2} + \frac{7}{2b+3}.$		
Determinați toate numerele naturale nenule a și b , pentru care valoarea expresiei $E(a, b)$ este un număr natural.		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Deducerea că $E(a, b) \in \{1, 2\}$.	1p.
2	Pentru $E(a, b) = 1$, obținerea $a = 1 + \frac{21}{2b-4}$.	1p.
3	Deducerea că nu existe numere naturale de forma $1 + \frac{21}{2b-4}$, pentru orice $b \in \mathbb{N}^*$.	1p.
4	Pentru $E(a, b) = 2$, obținerea $a = \frac{11-2b}{4b-1}$.	1p.
5	Determinarea valorilor naturale nenule b , pentru care $a = \frac{11-2b}{4b-1} \in \mathbb{N}$.	1p.
6	Obținerea perechilor $(a, b) \in \{(1, 2); (3, 1)\}$.	2p.
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.