Республиканская Олимпиада по Математике
Первый день, 2 марта 2019 года, VII-й класс
Схема оценивания

7.1. Докажите, что существует четыре последовательных простые числа, которые делят без остатка число $n = 2 + 2^2 + \cdots + 2^{2028}$.		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Показал, что $n \vdots 2$.	1б.
2	Доказал, что $n \vdots 3$.	2б.
3	Доказал, что $n \vdots 5$.	2б.
3	Доказал, что $n \vdots 7$.	2б.
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

7.2. Задан треугольник ABC в котором $AB = AC$ и $m(\angle BAC) = 72^{\circ}$. На стороне AB взяты точки D и E, таким образом что $\angle ACD \equiv \angle DCE \equiv \angle ECB$, а точка F расположена на стороне (BC) так, что EF является биссектрисой угла BEC. Докажите что $AF \perp CE$.		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Показал, что ΔACE - равнобедренный.	2б.
2	Доказал, что $\Delta AFB \equiv \Delta CFE$.	2б.
3	Получил, что $m(\angle EFT) = 36^0$, где $\{T\} = AF \cap CE$.	2б.
4	Показал, что $m(\angle ETF) = 90^0$.	1б.
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

7.3 На доске записаны все натуральные числа $1, 2, 3, \dots, 15$. Определите минимальное количество чисел, которое можно стереть с доски, чтобы с оставшимися числами можно было сформировать два непустых множества чисел, которые выполняет одновременно следующие условия: а) они не имеют общих элементов; б) они имеют одинаковое количество элементов; в) произведение элементов обоих множеств одинаково.		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Представил произведение всех чисел, написанных на доске, в виде произведения простых множителей.	1б.
2	Сделал вывод что произведение всех оставшихся чисел является полным квадратом.	1б.
3	Сделал вывод что нужно стереть с доски числа $10, 11, 13$.	2б.

4	Построил два множества, которые удовлетворяют условиям задачи, каждое состоящее из 6-ти элементов.	3б.
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

7.4. Задано выражение

$$E(a,b) = \frac{3}{a+2} + \frac{7}{2b+3}.$$

Найдите все натуральные ненулевые числа a и b, для которых значение выражение $E(a,b)$ есть натуральное число.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Показал что $E(a,b) \in \{1,2\}$.	1б.
2	Для $E(a,b) = 1$, получил $a = 1 + \frac{21}{2b-4}$.	1б.
3	Доказал, что не существует натуральных чисел, имеющих вид $1 + \frac{21}{2b-4}$, для любых $b \in \mathbb{N}^*$.	1б.
4	Для $E(a,b) = 2$, получил $a = \frac{11-2b}{4b-1}$.	1б.
5	Определил натуральные ненулевые значения b, для которых $a = \frac{11-2b}{4b-1} \in \mathbb{N}$.	1б.
6	Получил пары $(a,b) \in \{(1,2);\ (3,1)\}$.	2б.
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*