Olimpiada Republicană la Matematică
Prima zi, 2 martie 2019, Clasa a VII–a

Soluţii

7.1. Demonstraţi că există patru numere prime consecutive, care divid numărul $n = 2 + 2^2 + \cdots + 2^{2028}$.

Demonstraţie:

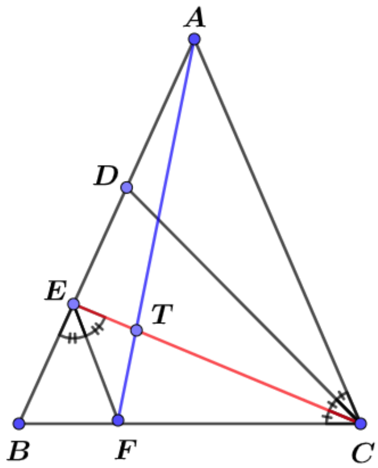
Evident că numărul n este par $\Longrightarrow n \vdots 2$. Vom demonstra că numărul n se divide cu 3, 5 şi 7.

- $n = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{2028} = (2 + 2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5 + 2^6) + \cdots + (2^{2026} + 2^{2027} + 2^{2028}) =$
  $= 2 \cdot (1 + 2 + 2^2) + 2^3 \cdot (1 + 2 + 2^2) + \cdots + 2^{2026} \cdot (1 + 2 + 2^2)$
  $= 2 \cdot 7 + 2^3 \cdot 7 + \cdots + 2^{2026} \cdot 7 =$
  $= 7 \cdot (2 + 2^3 + \ldots + 2^{2026}) \Longrightarrow n \vdots 7.$
- $n = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{2028} = (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + (2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8) + \cdots + (2^{2025} + 2^{2026} + 2^{2027} + 2^{2028}) = (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2^4 \cdot (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \cdots + 2^{2024} \cdot (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) =$
  $= 30 + 2^4 \cdot 30 + + \cdots + 2^{2024} \cdot 30 = 30 \cdot (1 + 2^4 + \cdots + 2^{2024}) \Longrightarrow n \vdots 3, 5.$

Deci, $n \vdots 2,\ 3,\ 5,\ 7$.

7.2. Fie ABC un triunghi isoscel cu $AB = AC$ şi $m(\angle BAC) = 72^{\circ}$. Pe latura AB se iau punctele D şi E, astfel încât $\angle ACD \equiv \angle DCE \equiv \angle ECB$, iar punctul F aparţine laturii (BC), astfel încât EF este bisectoarea unghiului BEC. Demonstraţi că $AF \perp CE$.

Demonstraţie:



$m(\angle BAC) = 72^0 \Rightarrow m(\angle ABC) = m(\angle ACB) = 54^0 \Rightarrow$

$m(\angle ACE) = 36^0 \Rightarrow m(\angle AEC) = 72^0$. Deci triunghiul ACE este isoscel, cu vârful în C, adică $AC = AB = CE$. Cum $m(\angle BEC) = 108^0$, obţinem $m(\angle BEF) = 54^0 = m(\angle EBF) \Rightarrow EF = BF$. Deoarece $FB = FE$, $AB = CE$ şi $\angle ABF \equiv \angle CEF \Longrightarrow (LUL)\ \Delta AFB \equiv \Delta CFE$. Astfel, avem că $m(\angle AFB) = 108^0$, iar $m(\angle EFB) = 72^0$, rezultă că $m(\angle EFT) = 36^0$, unde $\{T\} = AF \cap CE$. Prin urmare în triunghiul EFT, $m(\angle ETF) = 180^0 - (54^0 + 36^0) = 90^0$. Deci $EC \perp AF$.

7.3. Pe o tablă sunt scrise toate numerele naturale $1, 2, 3, \ldots, 15$. Determinaţi numărul minim de numere ce pot fi şterse de pe tablă, astfel încât cu numerele rămase să formăm două mulţimi nevide de numere care verifică simultan următoarele proprietăţi:
a) ele nu au elemente comune;
b) ele au acelaşi număr de elemente;
c) produsul elementelor celor două mulţimi este acelaşi.

Soluţie:

Produsul tuturor numerelor scrise iniţial pe tablă este $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$. Pentru a obţine ca produsul elementelor celor două mulţimi să fie acelaşi, rezultă că produsul tuturor numerelor rămase trebuie să fie un pătrat perfect. Astfel, trebuie să ştergem câte un factor din n care are exponent impar, adică pe $2, 5, 11, 13$. Deoarece cardinalul celor două mulţimi formate este acelaşi, rezultă că pe tablă trebuie să rămâne un număr par de numere. Cum, iniţiat pe tablă avem un număr impar de numere, rezultă că trebuie să ştergem un număr impar de numere. Astfel, ştergem de pe tablă numerele $10, 11, 13$. Pe tablă rămân numerele $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 15$. Din numerele rămase, deducem că 5 şi 15 nu aparţin aceleaşi mulţimi, la fel cum şi numerele 7 şi 14 nu aparţin aceleaşi mulţimi. În rezultat putem obţine mulţimile $M = \{2, 3, 5, 8, 9, 14\}$ şi $N = \{1, 4, 6, 7, 12, 15\}$ sau $M = \{1, 4, 5, 9, 12, 14\}$ şi $N = \{2, 3, 6, 7, 8, 15\}$.

7.4. Fie expresia

$$E(a,b) = \frac{3}{a+2} + \frac{7}{2b+3}.$$

Determinaţi toate numerele naturale nenule a şi b, pentru care valoarea expresiei $E(a,b)$ este un număr natural

.

Soluţie:

Deoarece $0 < \frac{3}{a+2} \leq 1$ și $0 < \frac{7}{2b+3} < 2 \Rightarrow E(a,b) \in (0;3)$. Cum, $E(a,b) \in \mathbb{N} \Rightarrow E(a,b) \in \{1,2\}$.

Cazul 1:

Fie $E(a,b) = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{a+2} + \frac{7}{2b+3} = 1 \Rightarrow \frac{3}{a+2} = \frac{2b-4}{2b+3} \Rightarrow \frac{a+2}{3} = \frac{2b+3}{2b-4} \Rightarrow a = 1 + \frac{21}{2b-4}$.

Deoarece $a \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{21}{2b-4} \in \mathbb{N}^* -$ imposibil deoarece $2b-4$ este număr par iar 21 este impar.

Cazul 2:

Fie $E(a,b) = 2 \Leftrightarrow \frac{3}{a+2} + \frac{7}{2b+3} = 2 \Rightarrow \frac{3}{a+2} = \frac{4b-1}{2b+3} \Rightarrow \frac{a+2}{3} = \frac{2b+3}{4b-1} \Rightarrow a = \frac{11-2b}{4b-1}$.

Deoarece $a \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 11 - 2b \geq 4b - 1 \Rightarrow b \leq 2$. Cum $b \in \mathbb{N}^* \Rightarrow b \in \{1,2\}$.Pentru $b = 1 \Rightarrow a = 3$,

iar pentru $b = 2 \Rightarrow a = 1$.

Răspuns: $(a,b) \in \{(1,2);\ (3,1)\}$.