Olimpiada Republicană la Matematică
Prima zi, 2 martie 2019, Clasa a VII–a

7.1. Demonstraţi că există patru numere prime consecutive, care divid numărul $n = 2 + 2^2 + \cdots + 2^{2028}$.

7.2. Fie ABC un triunghi isoscel cu $AB = AC$ şi $m(\angle BAC) = 72^{\circ}$. Pe latura AB se iau punctele D şi E, astfel încât $\angle ACD \equiv \angle DCE \equiv \angle ECB$, iar punctul F aparţine laturii (BC), astfel încât EF este bisectoarea unghiului BEC. Demonstraţi că $AF \perp CE$.

7.3. Pe o tablă sunt scrise toate numerele naturale: $1, 2, 3, \ldots, 15$. Determinaţi numărul minim de numere ce pot fi şterse de pe tablă, astfel încât cu numerele rămase să formăm două mulţimi nevide de numere care verifică simultan următoarele proprietăţi:
a) ele nu au elemente comune;
b) ele au acelaşi număr de elemente;
c) produsul elementelor din fiecare mulţime este acelaşi.

7.4. Fie expresia
$$E(a,b) = \frac{3}{a+2} + \frac{7}{2b+3}.$$
Determinaţi toate numerele naturale nenule a şi b, pentru care valoarea expresiei $E(a,b)$ este un număr natural.

Timp de lucru: 240 minute.

Rezolvarea corectă a fiecărei probleme se apreciază cu 7 puncte. **MULT SUCCES !**