

Olimpiada Republicană la Matematică

A doua zi, 3 martie 2019, Clasa a VII-a

Barem de evaluare

7.5. Determinați numerele întregi x , pentru care numerele $n = x^2 + 5x + 1$ și $m = x^2 + 3x + 7$ sunt simultan pătrate perfecte.		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Obținerea $x^2 + 3x + 7 = k^2 \Rightarrow (2x + 3 - 2k)(2x + 3 + 2k) = -19$	2p.
2	Rezolvarea sistemului $\begin{cases} 2x + 3 - 2k = -1 \\ 2x + 3 + 2k = 19 \end{cases}$ și obținerea $x = 3$.	2p.
3	Rezolvarea sistemului $\begin{cases} 2x + 3 - 2k = -19 \\ 2x + 3 + 2k = 1 \end{cases}$ și obținerea $x = -6$.	2p.
4	Stabilirea că pentru $x = 3$, expresia $x^2 + 5x + 1$ este un pătrat perfect, iar pentru $x = -6$, expresia $x^2 + 5x + 1$ nu este un pătrat perfect.	1p.
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

7.6 Trei copii: Andrei, Petru și Mihai, au fiecare câte un cartonaș. Pe fiecare cartonaș este scris câte un număr. Toți știu că pe cartonașe sunt numere naturale nenule, distincte două câte două, suma cărora este egală cu 15. Andrei știe că numărul scris pe cartonașul său este cel mai mic. Petru știe că numărul scris pe cartonașul său este cel mai mare, iar Mihai știe că numărul scris pe cartonașul său nu este nici cel mai mic, nici cel mai mare. Andrei spune: "Eu nu pot să determin ce numere sunt scrise pe cartonașele voastre". După care Petru spune: "Eu, la fel, nu pot să determin ce numere sunt scrise pe cartonașele voastre". În final, Mihai spune: "La început nici eu nu puteam să determin ce numere sunt scrise pe cartonașele voastre, dar după cele enunțate de voi, eu acum știu ce numere aveți scrise pe cartonașe". Determinați ce număr este scris pe cartonașul fiecărui băiat.		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Obținerea că cele trei cartonașe pot avea următoarele combinații de numere: (1,2,12), (1,3,11), (1,4,10), (1,5,9), (1,6,8), (2,3,10), (2,4,9), (2,5,8), (2,6,7), (3,4,8), (3,5,7), (4,5,6)	1p.
2	Argumentarea că Andrei nu are scris pe cartonașul său numărul 4 și Petru nu are scris pe cartonașul său numerele 11 și 12.	3p.
3	Argumentarea că Mihai are scris pe cartonașul său numărul 3.	2p.
4	Obținerea că Andrei are scris numărul 2 pe cartonașul său, iar Petru are scris numărul 10.	1p.
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

7.7. Fie triunghiul ABC cu $AB = AC$ și $m(\angle B) > 30^\circ$. În interiorul triunghiului considerăm un punct

M astfel încât $m(\angle MBC) = 30^0$ și $m(\angle MAB) = \frac{3}{4}m(\angle BAC)$. Determinați $m(\angle AMC)$.		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Construirea bisectoarei $(AD), D \in (BC)$.	2p.
2	Obținerea că AM și PM sunt bisectoare în triunghiul APC unde $\{P\} = AD \cap BM$.	3p.
3	Deducerea că CM e bisectoare în triunghiul APC .	1p.
4	Obținerea că $m(\angle AMC) = 150^0$	1p.
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

7.8. Determinați câte numere de două cifre \overline{ab} , verifică simultan următoarele condiții:		
a) \overline{ab} nu este divizibil cu 37;		
b) numărul $\overline{ababab \dots ab}$, unde \overline{ab} apare de 2019 ori este divizibil cu 37		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Obținerea că $\overline{ab} \notin \{37; 74\}$.	1p.
2	Scrierea $\overline{ababab \dots ab} = \overline{ab} \cdot (10^{4036} + 10^{4034} + 10^{4032} + \dots + 10 + 1)$	2p.
3	Scrierea $10^{4036} + 10^{4034} + 10^{4032} + \dots + 10 + 1 = 10101 \cdot (1 + 10^6 + 10^{12} + \dots + 10^{4032})$	2p.
4	Obținerea că $\overline{ababab \dots ab} : 37$, pentru orice \overline{ab} .	1p.
5	Stabilirea că există 88 de numere care verifică condițiile problemei.	1p.
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.