Olimpiada Republicană la Matematică
A doua zi, 3 martie 2019, Clasa a VII–a

Soluţii

7.5. Determinaţi numerele întregi x, pentru care numerele $n = x^2 + 5x + 1$ şi $m = x^2 + 3x + 7$ sunt simultan pătrate perfecte.

Soluţie:

Cum $x^2 + 3x + 7 = k^2 \Longrightarrow 4x^2 + 12x + 28 = 4k^2 \Leftrightarrow (2x+3)^2 + 19 = 4k^2 \Leftrightarrow (2x + 3 - 2k)(2x + 3 + 2k) = -19$.

a) $\begin{cases} 2x + 3 - 2k = -1 \\ 2x + 3 + 2k = 19 \end{cases} \Longrightarrow 4x + 6 = 18 \Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = 3$.

b) $\begin{cases} 2x + 3 - 2k = -19 \\ 2x + 3 + 2k = 1 \end{cases} \Longrightarrow 4x + 6 = -18 \Leftrightarrow 4x = -24 \Leftrightarrow x = -6$.

Astfel $x^2 + 3x + 7$ este un pătrat perfect pentru $x \in \{-6; 3\}$. Pentru $x = -6 \Longrightarrow x^2 + 5x + 1 = 7$ – care nu este un pătrat perfect, iar pentru $x = 3 \Longrightarrow x^2 + 5x + 1 = 25 = 5^2$.

Răspuns: $x = 3$.

7.6. Trei copii: Andrei, Petru şi Mihai, au fiecare câte un cartonaş. Pe fiecare cartonaş este scris câte un număr. Toţi ştiu că pe cartonaşe sunt numere naturale nenule, distincte două câte două, suma cărora este egală cu 15. Andrei ştie că numărul scris pe cartonaşul său este cel mai mic. Petru ştie că numărul scris pe cartonaşul său este cel mai mare, iar Mihai ştie că numărul scris pe cartonaşul său nu este nici cel mai mic, nici cel mai mare. Andrei spune: "*Eu nu pot să determin ce numere sunt scrise pe cartonaşele voastre*". După care Petru spune: "*Eu, la fel, nu pot să determin ce numere sunt scrise pe cartonaşele voastre*". În final, Mihai spune: "*La început nici eu nu puteam să determin ce numere sunt scrise pe cartonaşele voastre, dar după cele enunţate de voi, eu acum ştiu ce numere aveţi scrise pe cartonaşe*". Determinaţi ce număr este scris pe cartonaşul fiecărui băiat.

Soluţie:

Pe cele trei cartonaşe pot fi scrise numerele: (1,2,12), (1,3,11), (1,4,10), (1,5,9), (1,6,8), (2,3,10), (2,4,9), (2,5,8), (2,6,7), (3,4,8), (3,5,7), (4,5,6). Deoarece Andrei nu poate şti ce numere sunt scrise pe celelalte cartonaşe, rezultă că Andrei nu poate avea scris pe cartonaşul său numărul 4, în caz contrat el ar fi putut spune în mod sigur ce numere sunt scrise pe celelalte cartonaşe. În mod analog, Petru nu poate avea scris pe cartonaşul său numărul 11 şi 12. Astfel rămân posibilităţile: (1,4,10), (1,5,9), (1,6,8), (2,3,10), (2,4,9), (2,5,8), (2,6,7), (3,4,8), (3,5,7). Deoarece, acum Mihai poate spune ce numere sunt scrise pe celelalte cartonaşe, rezultă că pe cartonaşul său este scris numărul 3. Astfel numerele scrise pe cartonaşe sunt (2,3,10). Deci, Andrei are scris numărul 2, iar Petru are scris numărul 10.

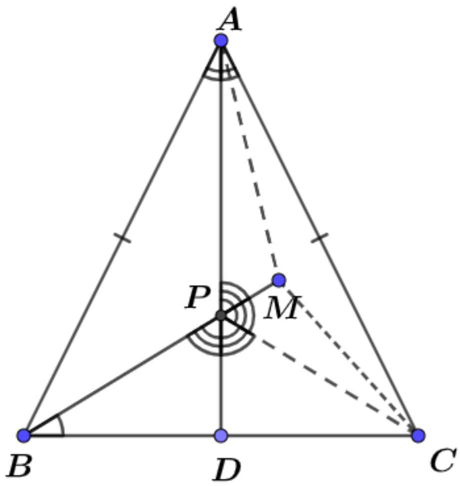
7.7. Fie triunghiul *ABC* cu $AB = AC$ şi $m(\angle B) > 30^0$. În interiorul triunghiului considerăm un punct *M* astfel încât $m(\angle MBC) = 30^0$ şi $m(\angle MAB) = \frac{3}{4} m(\angle BAC)$. Determinaţi $m(\angle AMC)$.

Soluţie:

Construim bisectoarea $(AD), D \in (BC)$. Fie $\{P\} = AD \cap BM$. Deoarece (AD) este şi înălţime, deducem că triunghiul *BPC* este isoscel, deci $m(\angle BPD) = m(\angle DPC) = 60^0$. Dar atunci $m(\angle APM) = m(\angle CPM) = 60^0$.

Din $m(\angle MAB) = \frac{3}{4} m(\angle BAC)$ obţinem $m(\angle PAM) = m(\angle MAC) = \frac{1}{4} m(\angle BAC)$. Deci, *AM* şi *PM* sunt bisectoare în triunghiul *APC*. Rezultă că şi *CM* e bisectoare, adică $m(\angle ACM) = m(\angle PCM)$.

În triunghiul *MAC* obţinem $m(\angle AMC) = 180^0 - [m(\angle MAC) + m(\angle MCA)] = 180^0 - \frac{1}{2}[m(\angle PAC) + m(\angle PCA)] = 180^0 - \frac{1}{2}[180^0 - 120^0] = 180^0 - 30^0 = 150^0$.



7.8. Determinaţi câte numere de două cifre $\overline{ab}$, verifică simultan următoarele condiţii:

a) $\overline{ab}$ nu este divizibil cu 37;
b) numărul $\overline{ababab \dots ab}$, unde $\overline{ab}$ apare de 2019 ori este divizibil cu 37.

Soluţie:

Din faptul că $\overline{ab}$ nu este divizibil cu $37 \Longrightarrow \overline{ab} \notin \{37; 74\}$. Considerăm numărul $n = \overline{ababab \dots ab}$, unde $\overline{ab}$ apare de 2019 ori. Atunci, $n = \overline{ab} \cdot (10^{4036} + 10^{4034} + 10^{4032} + \cdots + 10^2 + 1)$. Cum, $10^{4036} + 10^{4034} + 10^{4032} + + \cdots + 10^4 + 10^2 + 1 = (1 + 10^2 + 10^4) + (10^6 + 10^8 + 10^{10}) + \cdots + (10^{4032} + 10^{4034} + 10^{4036}) = 10101 + 10101 \cdot 10^6 + 10101 \cdot 10^{12} + 10101 \cdot 10^{4032} = 10101 \cdot (1 + 10^6 + 10^{12} + \cdots + 10^{4032})$, obţinem că $n = \overline{ab} \cdot 10101 \cdot (1 + 10^6 + 10^{12} + \cdots + 10^{4032})$. Dar $10101 \vdots 37 \Longrightarrow n \vdots 37$, oricare ar fi $\overline{ab}$. Astfel, numerele $\overline{ab} \in \mathbb{N} \setminus \{37; 74\}$. Deci, există 88 de numere.