A 63-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA
Chișinău, 01 martie 2019 – 04 martie 2019
Prima zi, 2 martie 2019. Clasa a VIII–a

Soluţia problemei 8.1

8.1. Determinați toate numerele naturale de forma $\overline{abcd}$ care sunt divizibile cu 3 și satisfac simultan condițiile: $a+b+d=11$, $a+c+d=12$, $b+c+d=10$.

Soluţie:

1) Deoarece $\overline{abcd}\,\vdots\,3$ deducem, că suma tuturor cifrelor se divide cu 3: $(a+b+c+d)\,\vdots\,3$

2) Prin adunare membru cu membru a celor trei egalități din enunț obținem: $2a+2b+2c+3d=33 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2(a+b+c)=33-3d \Rightarrow 2(a+b+c)=3(11-d)$ (1)

Din (1) avem $(a+b+c)\,\vdots\,3$

3) Din $a+b+d=11$ obținem $a+b=11-d$ (2)

Din (1) și (2) obținem $2(a+b)+2c=3(11-d) \Rightarrow 2(11-d)+2c=3(11-d) \Rightarrow 2c=11-d \Rightarrow$
$\Rightarrow c=\dfrac{11-d}{2}$ (3) și deci d este cifră impară.

Dar $(a+b+c)\,\vdots\,3$ și $(a+b+c+d)\,\vdots\,3 \Rightarrow d\,\vdots\,3 \Rightarrow d\in\{3;9\}$, deoarece d este cifră impară.

3) Fie $d=3 \Rightarrow c=\dfrac{11-3}{2}=4 \Rightarrow c=4$.

Dar din ipoteză avem $a+c+d=12 \Rightarrow a+4+3=12 \Rightarrow a=5$.

Din $b+c+d=10$ (din ipoteză) $\Rightarrow b+4+3=10 \Rightarrow b=3 \Rightarrow \overline{abcd}=5343$

4) Fie $d=9 \Rightarrow c=\dfrac{11-9}{2}=1 \Rightarrow c=1$.

Dar din ipoteză avem $a+c+d=12 \Rightarrow a+9+1=12 \Rightarrow a=2$.

Din $b+c+d=10$ (din ipoteză) $\Rightarrow b+1+9=10 \Rightarrow b=0 \Rightarrow \overline{abcd}=2019$

Răspuns: $\overline{abcd}\in\{5343;\,2019\}$.

A 63-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA
Chișinău, 01 martie 2019 – 04 martie 2019
Prima zi, 2 martie 2019. Clasa a VIII–a

Soluţia problemei 8.2

8.2. Demonstrați că numărul $A=2^{2020}+2^{1013}+2^{1010}-2^{508}+9$ se divide (se împarte) la numărul $B=2^{1010}-2^{505}+1$.

Soluţie:

Grupăm termenii lui A: $A=(2^{2020}+2^{1010}+1)+(2^{1013}-2^{508}+8)$ sau

$A=(2^{2020}+2\cdot 2^{1010}+1-2^{1010})+8\cdot 2^{1010}-8\cdot 2^{505}+8\cdot 1$

Transformăm A: $A=(2^{2020}+2\cdot 2^{1010}+1-2^{1010})+8\cdot(2^{1010}-2^{505}+1)$. De unde rezultă, că

$A=(2^{1010}+1)^2-(2^{505})^2+8\cdot(2^{1010}-2^{505}+1)$ sau $A=(2^{1010}+1-2^{505})\cdot(2^{1010}+1+2^{505})+8\cdot(2^{1010}-2^{505}+1)$

$\Rightarrow A=(2^{1010}-2^{505}+1)\cdot(2^{1010}+2^{505}+9)$.

Am obținut, că $A=B\cdot(2^{1010}+2^{505}+9)$, de unde avem: $A=B\cdot(2^{1010}+2^{505}+9) \Rightarrow A\,\vdots\,B$

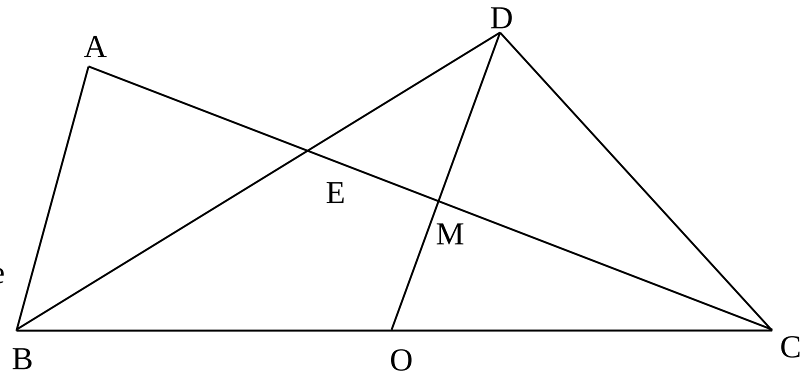
A 63-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA
Chișinău, 01 martie 2019 – 04 martie 2019
Prima zi, 2 martie 2019. Clasa a VIII–a

Soluţia problemei 8.3

8.3. Este dat triunghiul dreptunghic *ABC* cu $m(\angle A) = 90^\circ$. Bisectoarea unghiului *ABC* intersectează mediatoarea laturii $[AC]$ în punctul *D*, situat în exteriorul triunghiului *ABC*. Demonstrați că ΔBDC este dreptunghic.

Soluţie:

Deoarece *DM* este mediatoarea laturii $[AC]$ avem *AM*=*MC* și $DM \perp AC$.
Deoarece $DM \perp AC$ și $AB \perp AC$ rezultă, că $DM \parallel AB$. Și deci și *MO*||*AB*.
Deoarece *MO*||*AB*, conform teoremei reciproce a lui Thales (sau teoremei reciproce despre linia mijlocie a unui triunghi) avem:



$\frac{CM}{MA} = \frac{CO}{OB} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow CO=OB \Rightarrow$ O – mijlocul segmentului [*BC*] și [*DO*] este mediană în ΔBCD.
Deoarece [*BE* este bisectoarea $\angle ABC$, rezultă, că $\angle ABE \equiv \angle OBD$.
Deoarece *DO*||*AB* rezultă, că $\angle ABD \equiv \angle BDO$ (ca unghiuri alterne interne). Rezultă, că $\angle OBD \equiv \angle BDO$ și deci ΔOBD este isoscel cu baza [*BD*]. Deci *OD*=*OB*=*OC*.
Am obținut, că mediana [*OD*] este jumătate din ipotenuza [*BC*], adică ΔBDC este dreptunghic în *D*.

A 63-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA
Chișinău, 01 martie 2019 – 04 martie 2019
Prima zi, 2 martie 2019. Clasa a VIII–a

Soluţia problemei 8.4

8.4 Aflați toate perechile de numere reale (*x*, *y*) care satisfac egalitatea
$13(x^2 + y^2) = 4(6xy + 40x - 35y - 125)$.

Soluție:

Transformăm egalitatea din enunț:

$13x^2 + 13y^2 - 24xy - 160x + 140y + 500 = 0$

$4x^2 + 9x^2 + 4y^2 + 9y^2 - 12xy - 12xy - 40x - 120x + 60y + 80y + 100 + 400 = 0$

$(4x^2 + 9y^2 + 100 - 12xy - 40x + 60y) + (9x^2 + 4y^2 - 12xy - 120x + 80y + 400) = 0$

$(2x - 3y - 10)^2 + (3x - 2y - 20)^2 = 0$

Obținem sistemul:

$\begin{cases} 2x - 3y - 10 = 0 \\ 3x - 2y - 20 = 0 \end{cases}$, de unde se obține soluția *x*=8 și *y*=2, deci unica pereche este (*x*, *y*)=(8, 2).

Răspuns: (*x*, *y*)=(8, 2).