A 63-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 01 martie 2019 – 04 martie 2019

Ziua a doua, 3 martie 2019, Clasa a VIII–a

Barem de evaluare

8.5. *Aflați numerele naturale nenule* x, y, z *, știind că* $\frac{x^3}{x+26} = \frac{y}{y+25} = \frac{z^2}{z+12}$.

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Argumentează că $z^2 < z + 12$	1 p
2	Obține $z \in \{1, 2, 3\}$	1 p
3	Analizează cazul $z = 1$ și obține $y \notin \mathbb{N}$.	1 p
4	Analizează cazul $z = 2$ și obține $y = 10$	1 p
5	Obține ecuația $7x^3 = 2x + 52$ cu unica soluție $x = 2$	1 p
6	Analizează cazul $z = 3$ și obține $y \notin \mathbb{N}$.	1 p
7	Scrie răspunsul corect	1 p
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

8.6. *Fie funcția* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}^*$. *Dacă* m, n *sunt numere naturale distincte astfel încât*

$n > 2, m > 2, f(1) + f(2) + \cdots + f(m) = -n$ și $f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = -m$, *calculați*

$$\frac{f(1)+f(2)+\cdots+f(m+n)}{m+n}.$$

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Află $f(1) + f(2) + \cdots + f(m)$ în funcție de a și m	1 p
2	Află $f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$ în funcție de a și n	1 p
3	Scrie egalitățile $am^2 + am + 2mb + 2n = 0$ și $an^2 + an + 2nb + 2m = 0$	1 p
4	Obține egalitatea $a(m + n + 1) = 2(1 - b)$ $(m \neq n)$	1 p
5	Află $f(1) + f(2) + \cdots + f(m + n)$ în funcție de a, m și n	1 p
6	Obține $f(1) + f(2) + \cdots + f(m + n) = m + n$	1 p
7	Calculează $\frac{f(1)+f(2)+\cdots+f(m+n)}{m+n}$	1 p
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

8.7. *Fie triunghiul isoscel* ABC $(CA = CB)$, *în care sunt construite înălțimea* CD, $D \in (AB)$, *și perpendiculara* DE *la latura laterală* BC, $E \in (BC)$. *Punctul* M *este mijlocul segmentului* DE. *Demonstrați, că* $AE \perp CM$.		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Desen corect	1 p
2	Indică punctul N mijlocul segmentului EB şi argumentează $[DN]$ este linie mijlocie a triunghiului ABE	1 p
3	Indică $DN \parallel AE$ și $AE \perp CM \Leftrightarrow DN \perp CM$	1 p
4	Argumentează $\Delta DEC \sim \Delta BED$	1 p
5	Obține $\Delta DMC \sim \Delta BND$	1 p
6	Menționează $\angle MCD \equiv \angle NDB$	1 p
7	Obține $m(\angle COD) = 90^\circ$, unde $CM \cap DN = \{O\}$	1 p
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

8.8. *Fie* a, b, c *numere reale pozitive astfel încât* $a + b + c = 1$. *Demonstrați inegalitatea* $$\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ca} + \sqrt{c+ab} \leq 2.$$ *Aflați numerele* a, b, c *pentru care are loc egalitatea.*		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Obține $a \cdot 1 + bc = (a+b)(a+c)$	1 p
2	Analog $b + ca = (b+c)(b+a)$ și $c + ab = (c+a)(c+b)$	1 p
3	Aplică inegalitatea Mg ≤ Ma și obține $\sqrt{a+bc} \leq \frac{a+b+a+c}{2}$	1 p
4	Analog $\sqrt{b+ca} \leq \frac{b+c+b+a}{2}$ și $\sqrt{c+ab} \leq \frac{c+a+c+b}{2}$	1 p
5	Finalizează corect demonstraţia inegalităţii	1 p
6	Pentru cazul de egalitate obține sistemul $a + b = a + c$ și $b + c = b + a$ și $c + a = c + b$	1 p
7	Din $a = b = c$ și $a + b + c = 1$ obține $a = b = c = \frac{1}{3}$	1 p
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*