63-ая МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА
Кишинэу, 01 марта – 04 марта 2019

Второй день, 3 марта 2019 года, VIII-й класс

Схема оценивания

8.5. *Найдите натуральные ненулевые числа* x, y, z *если известно что* $\frac{x^3}{x+26} = \frac{y}{y+25} = \frac{z^2}{z+12}$.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Обосновывает что $z^2 < z + 12$	1 б
2	Получает $z \in \{1, 2, 3\}$	1 б
3	Исследует случай $z = 1$ и получает $y \notin \mathbb{N}$.	1 б
4	Исследует случай $z = 2$ и получает $y = 10$.	1 б
5	Получает уравнение $7x^3 = 2x + 52$ и находит единственное решение $x = 2$	1 б
6	Исследует случай $z = 3$ и получает $y \notin \mathbb{N}$.	1 б
7	Пишет правильный ответ	1 б
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

8.6. *Пусть* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}^*$. *Если* m, n *– различные натуральные числа такие, что*

$n > 2, m > 2, f(1) + f(2) + \cdots + f(m) = -n$ и $f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = -m,$ *вычислите*

$$\frac{f(1)+f(2)+\cdots+f(m+n)}{m+n}.$$

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Находит $f(1) + f(2) + \cdots + f(m)$ в зависимости от a и m	1 б
2	Находит $f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$ в зависимости от a и n	1 б
3	Пишет равенства $am^2 + am + 2mb + 2n = 0$ и $an^2 + an + 2nb + 2m = 0$	1 б
4	Получает равенство $a(m + n + 1) = 2(1 - b)$ $(m \neq n)$	1 б
5	Находит $f(1) + f(2) + \cdots + f(m + n)$ в зависимости от a, m и n	1 б
6	Получает $f(1) + f(2) + \cdots + f(m + n) = m + n$	1 б
7	Вычисляет $\frac{f(1)+f(2)+\cdots+f(m+n)}{m+n}$	1 б
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

8.7. *Дан равнобедренный треугольник* ABC $(CA = CB)$, *в котором проведены высота* CD, $D \in (AC)$, *и перпендикуляр* DE *к боковой стороне* $BC, E \in (BC)$.. *Точка* M $-$ *середина отрезка* DE. *Докажите, что* $AE \perp CM$.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Правильный рисунок	1 б
2	Указывает точку N – середина отрезка EB и обосновывает что $[DN]$ является средней линией треугольника ABE	1 б
3	Указывает $DN \parallel AE$ и $AE \perp CM \iff DN \perp CM$	1 б
4	Обосновывает $\Delta DEC \sim \Delta BED$	1 б
5	Получает $\Delta DMC \sim \Delta BND$	1 б
6	Отмечает $\angle MCD \equiv \angle NDB$	1 б
7	Получает $m(\angle COD) = 90^{\circ}$, где $CM \cap DN = \{O\}$	1 б
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

8.8. Пусть a, b, c действительные положительные числа такие, что $a + b + c = 1$. Докажите неравенство $$\sqrt{a + bc} + \sqrt{b + ca} + \sqrt{c + ab} \leq 2.$$ Найдите числа a, b, c для которых имеет место равенство.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Получает $a \cdot 1 + bc = (a + b)(a + c)$	1 б
2	Аналогично $b + ca = (b + c)(b + a)$ и $c + ab = (c + a)(c + b)$	1 б
3	Применяет неравенство Mg ≤ Ma и получает $\sqrt{a + bc} \leq \frac{a+b+a+c}{2}$	1 б
4	Аналогично $\sqrt{b + ca} \leq \frac{b+c+b+a}{2}$ и $\sqrt{c + ab} \leq \frac{c+a+c+b}{2}$	1 б
5	Завершает доказательство неравенства	1 б
6	Для случая равенство получает систему $a + b = a + c$ и $b + c = b + a$ и $c + a = c + b$	1 б
7	Из $a = b = c$ и $a + b + c = 1$ получает $a = b = c = \frac{1}{3}$	1 б
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*