A 63-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA
Chișinău, 01 martie 2019 – 04 martie 2019

Ziua a doua, 3 martie 2019, Clasa a VIII–a

Soluții

8.5. Aflați numerele naturale nenule x, y, z, știind că $\frac{x^3}{x+26} = \frac{y}{y+25} = \frac{z^2}{z+12}$.

Soluție: Deoarece x, y, z numere naturale nenule avem:

$y < y + 25 \;\Rightarrow\; \frac{y}{y+25} < 1 \;\Rightarrow\; z^2 < z + 12 \;\Rightarrow\; z \in \{1, 2, 3\}$.

$z = 1 \;\Rightarrow\; \frac{y}{y+25} = \frac{1}{13} \;\Leftrightarrow\; 13y = y + 25 \;\Leftrightarrow\; y = \frac{25}{12}$ și $y \notin \mathbb{N}$.

$z = 2 \;\Rightarrow\; \frac{y}{y+25} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow 7y = 2y + 50 \;\Leftrightarrow\; y = 10$ și $x = 2$. Argumentarea pentru valoarea lui x:

$\frac{x^3}{x+26} = \frac{2}{7} \;\Leftrightarrow\; 7x^3 = 2x + 52 \;\Leftrightarrow\; 7(x^3 - 8) - 2(x - 2) = 0 \;\Leftrightarrow\; (x - 2)(7x^2 + 14x + 26) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 2$.

$z = 3 \;\Rightarrow\; \frac{y}{y+25} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow\; 5y = 3y + 75 \;\Leftrightarrow\; y = \frac{75}{2}$ și $y \notin \mathbb{N}$.

Răspuns: $x = 2, y = 10, z = 2$.

8.6. Fie funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}^*$. Dacă m, n sunt numere naturale distincte astfel încât
$n > 2, m > 2, f(1) + f(2) + \cdots + f(m) = -n$ și $f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = -m$, calculați

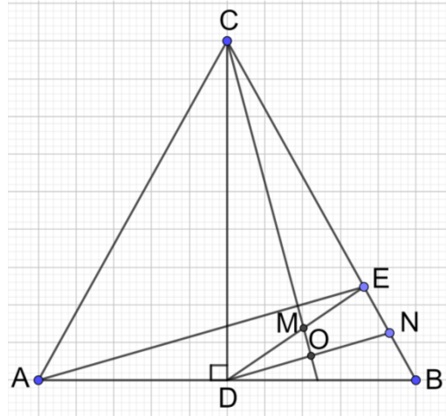
$$\frac{f(1)+f(2)+\cdots+f(m+n)}{m+n}.$$

Soluție: $f(1) + f(2) + \cdots + f(m) = a \cdot \frac{m(m+1)}{2} + mb$, analog $f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = a \cdot \frac{n(n+1)}{2} + nb \;\Rightarrow\; am^2 + am + 2mb + 2n = 0$ și $an^2 + an + 2nb + 2m = 0 \;\Rightarrow$
$am^2 + am + 2mb + 2n - an^2 - an - 2nb - 2m = 0 \;\Leftrightarrow\; a(m + n + 1) = 2(1 - b)$
$(m \neq n)$.

$f(1) + f(2) + \cdots + f(m + n) = a \cdot \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + b(m + n)$. Însă $a(m + n + 1) = 2(1 - b) \;\Rightarrow\; f(1) + f(2) + \cdots + f(m + n) = \frac{(m+n)2(1-b)}{2} + b(m + n) = m + n \;\Rightarrow$
$\frac{f(1)+f(2)+\cdots+f(m+n)}{m+n} = 1.$

Răspuns: 1

8.7. Fie triunghiul isoscel ABC $(CA = CB)$, în care sunt construite înălțimea CD, $D \in (AB)$, și perpendiculara DE la latura laterală BC, $E \in (BC)$. Punctul M este mijlocul segmentului DE. Demonstrați, că $AE \perp CM$.



Soluție. Fie N mijlocul segmentului EB, atunci $[DN]$ este linie mijlocie în triunghiul ABE $\Rightarrow$ $DN \| AE$.

Vom demonstra că $DN \perp CM$. Fie $CM \cap DN = \{O\}$.

$\Delta DEC \sim \Delta BED$ $(U.U.)$ $\Rightarrow$ $\Delta DMC \sim \Delta BND$ (după două laturi proporționale și unghiurile dintre ele congruente) $\Rightarrow$ $\angle MCD \equiv \angle NDB$.

Fie $m(\angle NDB) = \gamma$ atunci $m(\angle CDO) = 90^\circ - \gamma$ și deoarece $m(\angle DCM) = \gamma$ $\Rightarrow$ $m(\angle COD) = 90^\circ$ $\Rightarrow$ $DN \perp CM$.

8.8. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $a + b + c = 1$. Demonstrați inegalitatea

$$\sqrt{a + bc} + \sqrt{b + ca} + \sqrt{c + ab} \leq 2.$$

Aflați numerele a, b, c pentru care are loc egalitatea.

Soluție:

$a + bc = a(a + b + c) + bc = (a + b)(a + c)$. Analog $b + ca = (b + c)(b + a)$ și $c + ab = (c + a)(c + b)$. Atunci: $\sqrt{a + bc} + \sqrt{b + ca} + \sqrt{c + ab} = \sqrt{(a + b)(a + c)} + \sqrt{(b + c)(b + a)} + \sqrt{(c + a)(c + b)} \leq \frac{a+b+a+c}{2} + \frac{b+c+b+a}{2} + \frac{c+a+c+b}{2} = \frac{4(a+b+c)}{2} = 2.$

Egalitatea are loc dacă $\begin{cases} a + b = a + c \\ b + c = b + a \\ c + a = c + b \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $a = b = c$. Luând în considerație că $a + b + c = 1$, obținem $a = b = c = \frac{1}{3}$.