63-ая МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Кишинэу, 01 марта – 04 марта 2019

Второй день, 3 марта 2019 года, VIII-й класс

8.5. Найдите натуральные ненулевые числа x, y, z если известно что $\frac{x^3}{x+26} = \frac{y}{y+25} = \frac{z^2}{z+12}$.

8.6. Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}^*$. Если m, n − различные натуральные числа такие, что $n > 2, m > 2, f(1) + f(2) + \cdots + f(m) = -n$ и $f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = -m$, вычислите

$$\frac{f(1)+f(2)+\cdots+f(m+n)}{m+n}.$$

8.7. Дан равнобедренный треугольник ABC ($CA = CB$), в котором проведены высота $CD, D \in (AC)$, и перпендикуляр DE к боковой стороне $BC, E \in (BC)$. Точка M − середина отрезка DE. Докажите, что $AE \perp CM$.

8.8. Пусть a, b, c действительные положительные числа такие, что $a + b + c = 1$. Докажите неравенство

$$\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ca} + \sqrt{c+ab} \leq 2.$$

Найдите числа a, b, c для которых имеет место равенство.

Время работы: 240 минут.

Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. **ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!**