A 63-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 1 – 4 martie, 2019

Clasa a IX-a, prima zi

Barem de evaluare

Problema 9.1. Numerele reale x, y, z satisfac condițiile $x-2y+z=2$ şi $x+y-2z=5$. Să se afle aceste numere astfel, încât valoarea expresiei $E=xy+yz+xz$ să fie cea mai mică şi să se afle această valoare.

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	
1.	Exprimă *y* prin *x*	1 punct
2.	Exprimă *z* prin *x*	1 punct
3.	Exprimă *E* doar prin *x*: $E=3x^2-14x+12$	1 punct
4.	Separând pătratul perfect, află valoarea minimă pentru *E*, egală cu $-\frac{13}{3}$	2 puncte
5.	Află valoarea lui *x* pentru acest minim: $x=\frac{7}{3}$	1 punct
6.	Află valorile lui y şi *z* pentru acest minim: $y=-\frac{2}{3}$ şi $z=-\frac{5}{3}$	1 punct
	Punctaj total:	7 puncte

Remarcă. Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

Problema 9.2. Să se demonstreze, că oricare numere reale *a* şi *b* satisfac inegalitatea $\sqrt{(a-3)^2+b^2}+\sqrt{a^2+(b-4)^2}\geq 5$. Când are loc inegalitatea?

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	
1.	Separă un radical, $\sqrt{(a-3)^2+b^2}\geq 5-\sqrt{a^2+(b-4)^2}$ şi stabileşte, că dacă partea dreaptă e negativă, inegalitatea are loc	1 punct
2.	Pentru partea dreaptă nenegativă, ridică ambele părți la pătrat	1 punct
3.	Separă radicalul rămas şi ridică ambele părți la pătrat	1 punct
4.	Aduce inegalitatea la forma $(4a+3b-12)^2\geq 0$	2 puncte
5.	Pentru egalitate: a) află relația $4a+3b=12$	1 punct
6.	b) obține condițiile pentru *a*: $a\in[0,3]$.	1 punct
	Punctaj total:	7 puncte

Remarcă. Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

Problema 9.3. În pătratul *ABCD* punctele *E* şi *F* aparţin laturilor (*AD*) şi, respective, (*DC*). Diagonala *AC* intersectează *BE* şi *BF* în punctele *H* şi, respectiv, *G*. Dacă $m(\angle EBF) = 45^o$, iar $EG \cap HF = O$, să se demonstreze, că dreptele *BO* şi *EF* sunt perpendiculare.		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	
1.	Patrulaterul *ABGE* este inscriptibil,	1 punct
2.	deci $EG \perp BF$	1 punct
3.	Patrulaterul *BCFH* este inscriptibil,	1 punct
4.	deci $HF \perp BE$	1 punct
5.	Intersecția $HF \cap EG = O$ este ortocentrul triunghiului *BEF*	1 punct
6.	*BO* este înălțimea triunghiului *BEF*, deci $BO \perp EF$	2 puncte
	Punctaj total:	7 puncte

Remarcă. Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

Problema 9.4. Să se afle toate valorile parametrului real *a*, pentru care toate soluțiile ecuației $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4ax - a^2 = 0$ sunt reale Pentru valorile aflate, să se rezolve ecuația.		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Obține descompunerea $(x^2 + x + a)(x^2 - 3x - a) = 0$	3 puncte
2.	Pentru ecuația $x^2 + x + a = 0$ află condițiile pentru *a* şi soluțiile	2 puncte
3.	Pentru ecuația $x^2 - 3x - a = 0$ află condițiile pentru *a*, soluțiile şi finisează rezolvarea	2 puncte
	Punctaj total:	7 puncte

Remarcă. Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

A 63-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA
Chişinău, 1 – 4 martie, 2019
Clasa a IX-a, ziua a doua
Barem de evaluare

Problema 9.5. Să se demonstreze, că $\frac{1}{3!}+\frac{5}{4!}+\frac{11}{5!}+\ldots+\frac{n^2+n-1}{(n+2)!}<\frac{1}{2}$, oricare ar fi numărul natural n. Cu $n!$ (se citeşte n factorial) se notează produsul primelor n numere naturale nenule: $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$.

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Pune în evidență termenul general $a_k=\frac{k^2+k-1}{(k+2)!}$	1 punct
2.	Obține $a_k=\frac{1}{k!}-\frac{2}{(k+1)!}+\frac{1}{(k+2)!}$	3 puncte
3.	Scrie suma şi reduce toți termenii asemenea	2 puncte
4.	Obține $S_n<\frac{1}{2}$	1 punct
	Punctaj total:	7 puncte

Remarcă. Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

Problema 9.6. Să se afle toate perechile (x,y) de numere naturale, care satisfac ecuația $x^2-6xy+8y^2+5y-5=0$.

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Ordonează ecuația ca o ecuație de gradul 2 în raport cu x	1 punct
2.	Află discriminantul Δ	1 punct
3.	Pune condiția $\Delta=k^2$	1 punct
4.	Obține ecuația $(2y-5-k)(2y-5+k)=5$	1 punct
5.	Argumentează, că $2y-5-k\le 2y-5+k$	1 punct
6.	Obține două sisteme şi le soluționează, aflând soluțiile ecuației date	2 puncte
	Punctaj total:	7 puncte

Remarcă. Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

Problema 9.7. Fie *a* şi *b* două drepte paralele. Cercul Ω este tangent la dreapta *a* în punctul *A* şi intersectează dreapta *b* în punctele *B* şi *C*. Punctul *T* este situat pe dreapta *a*. Dreptele *BT* şi *CT* intersectează din nou cercul Ω în punctele *M* şi, respectiv, *N*. Să se arate, că dreapta *MN* înjumătăţeşte segmentul $[AT]$.

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Notează $m(\angle TBC)=\alpha$ şi obţine $m(\angle ATB)=\alpha$	1 punct
2.	Patrulaterul *MBCN* este inscriptibil, deci $m(\angle PNT)=\alpha$	2 puncte
3.	$\Delta PTM \sim \Delta PNT$	1 punct
4.	Obţine $PT^2 = PM \cdot PN$	1 punct
5.	$PM \cdot PN = AP^2$	1 punct
6.	Conchide, că *PT*=*AP*, c.t.d	1 punct
	Punctaj total:	7 puncte

Remarcă. Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

Problema 9.8. Din mulţimea $1,2,3,\ldots,n$ se aleg 9 numere, distincte două câte două, care se înscriu în celulele unui tabel 3×3 astfel, încât produsele numerelor din fiecare linie, coloană şi din diagonale să fie egale. Să se determine cea mai mică valoare a lui *n*, pentru care un asemenea tabel există.

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Cu notaţiile din rezolvare, pune în evidenţă numărul *x* din celula centrală şi află $k=x^3$	1 punct
2.	Determină $x^2 = ah = cf = de = bg$	1 punct
3.	Află valoarea minimă pentru *x*, egală cu 6	1 punct
4.	Pentru *n=36* construieşte un exemplu de tabel	2 puncte
5.	Pentru *n*<36, oricare număr din tabel are forma $2^m \cdot 3^n$	1 punct
6.	Află valorile posibile pentru numerele din tabel şi arată, că un asemenea tabel nu există, ceea ce finisează rezolvarea	1 punct
	Punctaj total:	7 puncte

Remarcă. Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.