63-а МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Кишинэу, 1 – 4 марта, 2019

IX-й класс, первый день

Схема оценки работ

Задача 9.1. Действительные числа x, y, z удовлетворяют условиям $x-2y+z=2$ и $x+y-2z=5$. Найти эти числа так, чтобы значение выражения $E=xy+yz+xz$ было наименьшим; найти это значение.		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Выражает *y* через *x*	1 балл
2.	Выражает *z* через *x*	1 балл
3.	Выражает *E* только через *x*: $E=3x^2-14x+12$	1 балл
4.	Выделяя полный квадрат (или другим способом), находит наименьшее значение *E*, равное $-\dfrac{13}{3}$	2 балла
5.	Находит значение *x* для этого минимума: $x=\dfrac{7}{3}$	1 балл
6.	Находит значения y и *z* для этого минимума: $y=-\dfrac{2}{3}$ şi $z=-\dfrac{5}{3}$	1 балл
	Общее количество баллов:	7 баллов

Примечание. *Любое другое правильное решение оценивается в* 7 *баллов*.

Задача 9.2. Доказать, что любые действительные числа a и b удовлетворяют неравенству $\sqrt{(a-3)^2+b^2}+\sqrt{a^2+(b-4)^2}\geq 5$. Когда выполнено равенство?		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Отделяет радикал, $\sqrt{(a-3)^2+b^2}\geq 5-\sqrt{a^2+(b-4)^2}$ и устанавливает, что если правая часть отрицательна, неравенство выполнено	1 балл
2.	Для неотрицательной правой части, возводит неравенство в квадрат	1 балл
3.	Отделяет оставшийся радикал и возводит в квадрат	1 балл
4.	Приводит неравенство к виду $(4a+3b-12)^2\geq 0$	2 балла
5.	Для равенства: a) находит соотношение $4a+3b=12$	1 балл
6.	b) Получает условия для *a*: $a\in[0,3]$.	1 балл
	Общее количество баллов:	7 баллов

Примечание. *Любое другое правильное решение оценивается в* 7 *баллов*.

Задача 9.3. В квадрате $ABCD$ точки E и F принадлежат сторонам (AD) и (DC) соответственно. Диагональ AC пересекает BE и BF в точках H и G соответственно. Если $m(\angle EBF) = 45^o$, а $EG \bigcap HF = O$, доказать, чт о прямые BO и EF перпендикулярны.		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Четырехугольник $ABGE$ вписан,	1 балл
2.	следовательно $EG \perp BF$	1 балл
3.	Четырехугольник $BCFH$ вписан,	1 балл
4.	следовательно $HF \perp BE$	1 балл
5.	Пересечение $HF \bigcap EG = O$ - ортоцентр треугольника BEF	1 балл
6.	BO – высота треугольника BEF, следовательно $BO \perp EF$	2 балла
	Общее количество баллов:	7 баллов

Примечание. *Любое другое правильное решение оценивается в* 7 *баллов*.

Задача 9.4. Найти все значения действительного параметра a, для которых все корни уравнения $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4ax - a^2 = 0$ действительны. Для найденных значений a, решить уравнение.		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Получает разложение $(x^2 + x + a)(x^2 - 3x - a) = 0$	3 балла
2.	Для уравнения $x^2 + x + a = 0$ находит условия для a и корни	2 балла
3.	Для уравнения $x^2 - 3x - a = 0$ находит условия для a, корни и завершает решение	2 балла
	Общее количество баллов:	7 баллов

Примечание. *Любое другое правильное решение оценивается в* 7 *баллов*.

63-а МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Кишинэу, 1 – 4 марта, 2019

IX-й класс, второй день

Схема оценки работ

Задача 9.5. Доказать, что $\frac{1}{3!}+\frac{5}{4!}+\frac{11}{5!}+\ldots+\frac{n^2+n-1}{(n+2)!}<\frac{1}{2}$, для любого натурального числа n. Через $n!$ (читается n факториал) обозначается произведение первых n натуральных ненулевых чисел: $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Выявляет общий член суммы: $a_k=\frac{k^2+k-1}{(k+2)!}$	1 балл
2.	Получает $a_k=\frac{1}{k!}-\frac{2}{(k+1)!}+\frac{1}{(k+2)!}$	3 балла
3.	Выписывает сумму и приводит все подобные члены	2 балла
4.	Получает $S_n<\frac{1}{2}$	1 балл
	Общее количество баллов:	7 баллов

Примечание. *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

Задача 9.6. Найти все пары (x,y) натуральных чисел, которые удовлетворяют уравнению $x^2-6xy+8y^2+5y-5=0$.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Рассматривает уравнение как уравнение 2-й степени относительно x	1 балл
2.	Находит дискриминант Δ	1 балл
3.	Ставит условие $\Delta=k^2$	1 балл
4.	Получает уравнение $(2y-5-k)(2y-5+k)=5$	1 балл
5.	Аргументирует, что $2y-5-k\le 2y-5+k$	1 балл
6.	Получает две системы и решает их; находит ршения данного уравнения	2 балла
	Общее количество баллов:	7 баллов

Примечание. *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

Задача 9.7. Пусть a и b две параллельные прямые. Окружность Ω касается прямой a в точке A и пересекает прямую b в точках B и C. Точка T расположена на прямой a. Прямые BT и CT пересекают вновь окружность Ω в точках M и N соответственно. Показать, что прямая MN делит отрезок $[AT]$ пополам.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Обозначает $m(\angle TBC)=\alpha$ и получает $m(\angle ATB)=\alpha$	1 балл
2.	Четырехугольник $MBCN$ вписан, следовательно, $m(\angle PNT)=\alpha$	2 балла
3.	$\Delta PTM \sim \Delta PNT$	1 балл
4.	Получает $PT^2 = PM \cdot PN$	1 балл
5.	$PM \cdot PN = AP^2$	1 балл
6.	Заключает, что $PT=AP$, ч.т.д.	1 балл
	Общее количество баллов:	7 баллов

Примечание. *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

Задача 9.8. Из множества $1,2,3,\ldots,n$ выбирают 9 попарно различных чисел, которых вписывают в клетках таблицы 3×3 так, что произведения чисел в каждой строке, столбце и диагоналях равны. Найти наименьшее значение n, для которого такая таблица существует.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	С обозначениями из “Решения”, рассматривает число x из центральной клетки и находит $k = x^3$	1 балл
2.	Устанавливает, что $x^2 = ah = cf = de = bg$	1 балл
3.	Находит наименьшее значение x, равное 6	1 балл
4.	Для $n=36$ строит пример таблицы	2 балла
5.	Для n <36, любое число из таблицы имеет вид $2^m \cdot 3^n$	1 балл
6.	Находит возможные значения для чисел из таблицы и показывает, что такая таблица не существует, что завершает решение	1 балл
	Общее количество баллов:	7 баллов

Примечание. *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*