A 63-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 1 – 4 martie, 2019

CLASA IX-a, prima zi

SOLUŢII

Problema 9.1. *Numerele reale x, y, z satisfac condiţile $x-2y+z=2$ şi $x+y-2z=5$. Să se afle aceste numere astfel, încât valoarea expresiei $E=xy+yz+xz$ să fie cea mai mică; să se afle această valoare.*

Rezolvare. Din relaţiile date, $\begin{cases} x-2y+z=2, \\ x+y-2z=5; \end{cases}$ se pot exprima y şi z prin x. Înmulţind prima egalitate cu 2 şi adunând-o cu a doua, se obţine $y=x-3$. Apoi, înmulţind egalitatea a doua cu 2 şi adunând-o cu prima, se obţine $z=x-4$. Substituind valorile lui y şi z în expresia pentru E, se află $E=3x^2-14x+12$. Prin separarea pătratului perfect se obţine

$$E=3\left(x^2-2\cdot\frac{7}{3}x+\frac{49}{9}-\frac{49}{9}+4\right)=3\left(x-\frac{7}{3}\right)^2-\frac{13}{3}.$$

Acum e clar, că valoarea cea mai mică a lui E este egală cu $-\frac{13}{3}$ şi se obţine pentru $x=\frac{7}{3}$. În continuare, se află şi $y=-\frac{2}{3}$, $z=-\frac{5}{3}$.

Astfel, pentru $x=\frac{7}{3}$, $y=-\frac{2}{3}$ şi $z=-\frac{5}{3}$ valoarea expresiei E este cea mai mică şi este egală cu $-\frac{13}{3}$.

Problema 9.2. *Să se demonstreze, că oricare numere reale a şi b satisfac inegalitatea*

$$\sqrt{(a-3)^2+b^2}+\sqrt{a^2+(b-4)^2}\geqslant 5.$$

Când are loc egalitatea?

Rezolvare. Metoda 1. Inegalitatea din enunţ se scrie astfel: $\sqrt{(a-3)^2+b^2}\geqslant 5-\sqrt{a^2+(b-4)^2}$.

Fie a şi b două numere reale arbitrare. Dacă partea dreaptă a inegalităţii este negativă, atunci inegalitatea este adevărată. Dacă ea este nenegativă, se ridică ambele părţi la pătrat:

$$(a-3)^2+b^2\geqslant(5-\sqrt{a^2+(b-4)^2} \;\Leftrightarrow\; 5\sqrt{a^2+(b-4)^2}\geqslant 3a-4b+16.$$

Iarăşi, dacă partea dreaptă este negativă, inegalitatea este adevărată. În caz contrar, din nou se ridică la pătrat:

$$25\left[a^2+(b-4)^2\right]\geqslant(3a-4b+16)^2 \;\Leftrightarrow\; 16a^2+9b^2+24ab-96a-72b+144\geqslant 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; 16a^2+(24b-96)a+(9b^2-72b+144)\geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; 16a^2+8(3b-12)\cdot a+(3b-12)^2\geqslant 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; (4a)^2+2\cdot 4a\cdot(3b-12)+(3b-12)^2\geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; (4a+3b-12)^2\geqslant 0.$$

Ultima inegalitate este adevărată pentru oricare numere reale a şi b. Deci este adevărată şi inegalitatea din enunţ. Evident, condiţia necesară, dar nu şi suficientă pentru egalitate este $4a+3b-12=0$. Se exprimă b prin a: $b=4-\frac{4}{3}a$, şi se substituie această valoare în relaţia de egalitate din enunţ. Se obţine $|a-3|+|a|=3$, care înseamnă $a\in[0,\,3]$.

Astfel, egalitatea are loc pentru $4a+3b=12$, unde $a\in[0,\,3]$.

Metoda 2. Fie a şi b două numere reale arbitrare. În sistemul de coordonate XOY se consideră triunghiul cu vârfurile $A(3,0)$, $B(0,4)$ şi $C(a,b)$ (Fig. 1). Se calculează lungimile laturilor:

$$AB=5,\; AC=\sqrt{(a-3)^2+b^2},\; BC=\sqrt{a^2+(b-4)^2}.$$

În triunghi, $AC+BC>AB$, adică $\sqrt{(a-3)^2+b^2}+\sqrt{a^2+(b-4)^2}>5$.

Egalitatea are loc, dacă punctul C aparţine segmentului AB (Fig. 2). În acest caz, din asemănarea triunghiurilor AOB şi AA_1C rezultă $\frac{3-a}{3}=\frac{b}{4}$, adică $4a+3b=12$ cu condiţia $0\leqslant a\leqslant 3$.

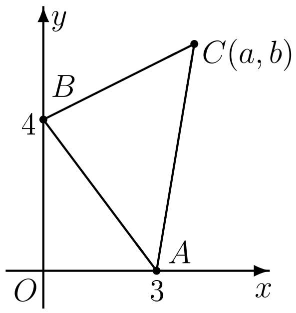


Fig. 1

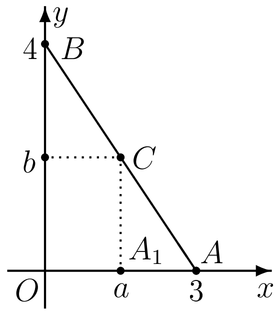


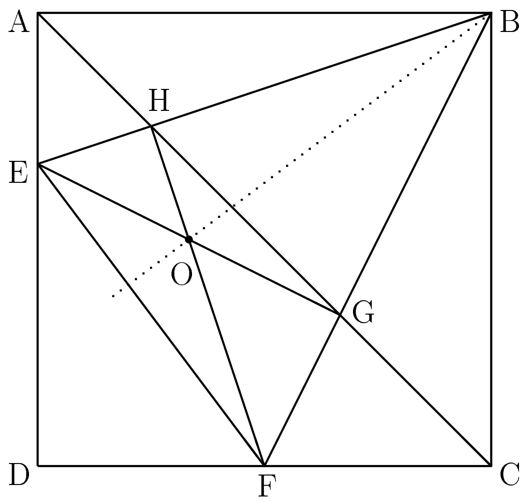
Fig. 2

Problema 9.3. *În pătratul $ABCD$ punctele E şi F aparţin laturilor (AD) şi, respectiv, (DC). Diagonala AC intersectează BE şi BF în punctele H şi, respectiv, G. Dacă $m(\angle EBF) = 45^o$, iar $EG \cap HF = \{O\}$, să se demonstreze, că dreptele BO şi EF sunt perpendiculare.*

Rezolvare. 1) Cum $m\angle CAD = m\angle EBF = 45^o$, patrulaterul $ABGE$ (figura alăturată) este inscriptibil. Prin urmare, $m\angle BGE = m\angle BAD = 90^o$.

2) Analog, cum $m\angle FCH = m\angle EBF = 45^o$, patrulaterul $BCFH$ de asemenea este inscriptibil. Prin urmare, $m\angle BHF = m\angle BCF = 90^o$.

3) Conform condiţiei, $HF \cap EG = \{O\}$. Punctul O este ortocentrul triunghiului BEF. A treia înălţime a triunghiului, cea din vârful B, de asemenea trece prin O. Astfel, $BO \perp EF$, c.t.d.



Problema 9.4 *Să se afle toate valorile parametrului real a, pentru care toate soluţiile ecuaţiei*

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4ax - a^2 = 0$$

sunt reale. Pentru valorile aflate, să se rezolve ecuaţia.

Rezolvare. Ecuaţia se ordonează ca o ecuaţie de gradul 2 în raport cu necuniscuta a:

$$a^2 + 4x \cdot a + (3x^2 + 2x^3 - x^4) = 0. \tag{1}$$

Discriminantul ei, $\Delta = 16x^2 - 12x^2 - 8x^3 + 4x^4 = 4x^2(x^2 - 2x + 1) = 4x^2(x-1)^2$. Se află soluţiile $a_1 = -x^2 - x$ şi $a_2 = x^2 - 3x$. Descompunând partea stângă, ecuaţia (1) ia forma $(a + x^2 + x)(a - x^2 + 3x) = 0$ sau $(x^2 + x + a)(x^2 - 3x - a) = 0$. Astfel, ecuaţia din enunţ este echivalentă cu totalitatea

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + x + a = 0, \\ x^2 - 3x - a = 0. \end{array}\right.$$

Toate soluţiile ecuaţiei (1) trebuie să fie reale, deci şi soluţiile fiecărei ecuaţii a totalităţii trebuie să fie reale. Discriminantul primei ecuaţii trebuie să fie nenegativ: $\Delta_1 = 1 - 4a \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; a \leqslant \dfrac{1}{4}$. Analog, pentru ecuaţia a doua, $\Delta_2 = 9 + 4a \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; a \geqslant -\dfrac{9}{4}$. Ecuaţia are soluţii reale pentru $a \in \left[-\dfrac{9}{4}, \dfrac{1}{4}\right]$. Rezolvarea fiecărei ecuaţii nu prezintă vre-o dificultate.

Astfel, ecuaţia are toate soluţiile reale pentru $a \in \left[-\dfrac{9}{4}, \dfrac{1}{4}\right]$; $S = \left\{\dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}, \dfrac{3 \pm \sqrt{4a+9}}{2}\right\}$.

Remarcă. Partea stângă a ecuaţiei din enunţ poate fi descompusă în factori şi prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi. Fie

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4ax - a^2 = (x^2 + mx - a)(x^2 + nx + a)$$

cu coeficienţii m şi n nedeterminaţi încă. După deschiderea parantezelor şi egalarea coeficienţilor pentru aceleaşi puteri ale lui x, se află m şi n, deci şi descompunerea respectivă.

A 63-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA
Chişinău, 1 – 4 martie, 2019
$\mathcal{CLASA}$ IX-a, ziua a doua
SOLUŢII

Problema 9.5. *Să se demonstreze, că*

$$\frac{1}{3!}+\frac{5}{4!}+\frac{11}{5!}+\ldots+\frac{n^2+n-1}{(n+2)!}<\frac{1}{2},$$

oricare ar fi numărul natural n. Cu $n!$ (se citeşte n factorial) se notează produsul primelor n numere naturale nenule: $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot n$.

Rezolvare. Fie S_n suma din partea stângă a inegalităţii, iar a_k termenul general al sumei. Acest termen se descompune într-o sumă algebrică de câteva fracţii mai simple:

$$a_k=\frac{k^2+k-1}{(k+2)!}=\frac{(k+2)(k+1)-2(k+2)+1}{(k+2)!}=\frac{1}{k!}-\frac{2}{(k+1)!}+\frac{1}{(k+2)!}.$$

Atunci $S_n=\left(\frac{1}{1!}-\frac{2}{2!}+\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{2}{3!}+\frac{1}{4!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{2}{4!}+\frac{1}{5!}\right)+\left(\frac{1}{4!}-\frac{2}{5!}+\frac{1}{6!}\right)+$

$$+\left(\frac{1}{5!}-\frac{2}{6!}+\frac{1}{7!}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{(n-1)!}-\frac{2}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}\right)+\left(\frac{1}{n!}-\frac{2}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}\right).$$

Începând cu paranteza a doua, toţi termenii negativi se reduc cu suma a doi termeni asemenea, luaţi din parantezele precedentă şi următoare. În rezultat, se obţine

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{(n+1)!}-\frac{2}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!},\quad \text{adică}\quad S_n=\frac{1}{2}-\frac{n+1}{(n+2)!}\,.$$

Din fracţia $\frac{1}{2}$ se scade un număr pozitiv, prin urmare, $S_n<\frac{1}{2}$, c.t.d.

Problema 9.6. *Să se afle toate perechile (x, y) de numere naturale, care satisfac ecuaţia*

$$x^2-6xy+8y^2+5y-5=0.$$

Rezolvare. Ecuaţia se ordonează ca o ecuaţie de gradul 2 în raport cu necunoscuta x:

$$x^2-6y\cdot x+(8y^2+5y-5)=0.$$

Discriminantul ei, $\Delta=4y^2-20y+20$ trebuie să fie un pătrat perfect. Fie $4y^2-20y+20=k^2$; pentru k sunt suficiente valorile naturale. Urmează $(2y-5)^2-k^2=5$, sau $(2y-5-k)(2y-5+k)=5$. Pentru k natural este adevărată inegalitatea $2y-5-k\leqslant 2y-5+k$. Cum $5=1\cdot 5=(-1)\cdot(-5)$, pentru factorii părţii stângi există două posibilităţi:

$$1.\begin{cases}2y-5-k=1,\\2y-5+k=5;\end{cases}\qquad 2.\begin{cases}2y-5-k=-5,\\2y-5+k=-1.\end{cases}$$

Primul sistem are soluţia $y=4,\ k=2$. Punând $y=4$ în ecuaţia din enunţ, se obţine $x^2-24x+143=0$, care conduce la soluţiile $(11, 4)$ şi $(13, 4)$.

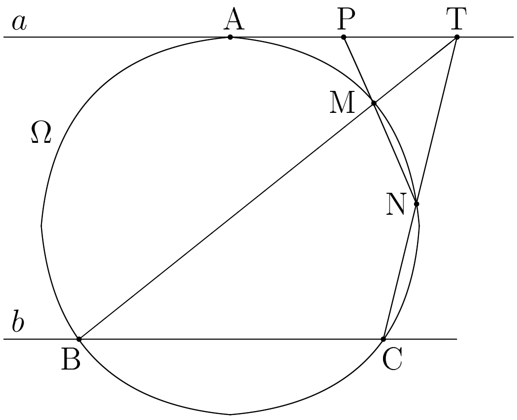
Din cel de-al doilea sistem se află $y=1,\ k=2$. Pentru $y=1$ ecuaţia din enunţ ia forma $x^2-6x+8=0$, din care se obţin soluţiile $(2, 1)$ şi $(4, 1)$.

Astfel, ecuaţia dată are mulţimea de soluţii $S=\{(2, 1), (4, 1), (11, 4), (13, 4)\}$.

Remarcă. Există şi alte metode de rezolvare. De exemplu, ecuaţia din enunţ se scrie sub forma $(x-3y)^2=y^2-5y+5$ şi se arată, că $(y-3)^2<(x-3y)^2<(y-2)^2$ pentru $y>4$. Pentru valorile rămase, $y=0,1,2,3,4$, se află soluţiile ecuaţiei.

Problema 9.7. *Fie a şi b două drepte paralele. Cercul Ω este tangent la dreapta a în punctul A şi intersectează dreapta b în punctele distincte B şi C. Punctul T este situat pe dreapta a. Dreptele BT şi CT intersectează din nou cercul Ω în punctele M şi, respectiv, N. Să se arate, că dreapta MN înjumătăţeşte segmentul $[AT]$.*

Rezolvare. 1) Fie P punctul de intersecţie al dreptelor a şi MN (figura alăturată) şi fie $m(\angle TBC) = \alpha$. Cum $a \parallel b$, rezultă $m(\angle ATB) = \alpha$.



2) Patrulaterul $MBCN$ este înscris în cerc, deci $\alpha + m(\angle MNC) = 180^o$. Dar şi $m(\angle MNC) + m(\angle PNT) = 180^o$, deci $m(\angle PNT) = \alpha$.

3) Triunghiurile PTM şi PNT au unghiul P comun şi $m(\angle PTM) = m(\angle PNT) = \alpha$, deci sunt asemenea.

4) Prin urmare, $\dfrac{PT}{PN} = \dfrac{PM}{PT} \Leftrightarrow PT^2 = PM \cdot PN$.

5) Din punctul P sunt trasate la cercul Ω tangenta PA şi secanta PN; rezultă $PM \cdot PN = AP^2$.

Din ultimele două egalităţi rezultă $PT^2 = AP^2$, adică $PT = AP$. Astfel, P este mijlocul segmentului AT, c.t.d.

Problema 9.8. *Din mulţimea $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ se aleg 9 numere, distincte două câte două, care se scriu în celulele unui tabel 3×3 astfel, încât produsele numerelor din fiecare linie, coloană şi din diagonale să fie egale. Să se determine cea mai mică valoare a lui n, pentru care un asemenea tabel există.*

Rezolvare. Fie k produsul menţionat în enunţ, iar x numărul din celula centrală a tabelului. Numărul x figurează în 4 produse – în linia a 2, în coloana 2 şi în ambele diagonale. Produsul tuturor numerelor din linia 2, coloana 2 şi din ambele diagonale este k^4. În acest produs numărul x participă de 4 ori, iar toate celelalte câte o dată. Prin urmare, $k^4 = k^3x^3$, adică $k = x^3$. Considerăm primul dintre cele două tabele alăturate cu notaţiile evidente. Egalând cu x^3 fiecare produs, care conţine x, se află

$$ah = cf = de = bg = x^2. \qquad (1)$$

a	b	c
d	**x**	e
f	g	h

12	1	18
9	6	4
2	36	3

Cum numărul x^2 poate fi scris ca un produs de două numere distincte în 4 moduri, cea mai mică valoare posibilă pentru x poate fi 6 ($6^2 = 36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9$). În acest caz, mulţimea numerelor din tabel ar fi $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$. Pentru $n = 36$ un asemenea tabel există, de exemplu, cel de-al doilea dintre tabelele alăturate.

Vom arăta, că pentru $n < 36$ un asemenea tabel nu există. Fie $n \leqslant 35$ şi fie p un divizor prim a lui x. Produsul tuturor numerelor din tabel este $k^3 = x^9$, deci numărul 35! trebuie să se dividă cu p^9. Însă 35! nu se divide cu 5^9, cu atât mai mult produsul numerelor din tabel nu se divide cu 5^9. Prin urmare, x nu se divide nici cu un număr prim $p > 5$. Astfel, numărul x poate avea doar divizorii primi 2 şi 3. Dar atunci toate numerele din tabel vor fi de forma $2^m \cdot 3^n$ şi nu pot fi mai mari ca 32. Rezultă că în tabel vor nimeri 9 numere din mulţimea

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 32\}.$$

Din egalitatea (1) rezultă că x poate fi prezentat în cel puţin 4 moduri ca produs de doi factori, unul mai mare ca x şi altul mai mic ca x. Prin urmare, $6 \leqslant x \leqslant 16$. Vom arăta, că nici unul dintre numerele $x \in [6,\ 16]$, nu are 4 reprezentări. Avem:

1) $16^2 = 8\cdot 32$; **2**) $12^2 = 6\cdot 24 = 8\cdot 18 = 9\cdot 16$; **3**) $9^2 = 3\cdot 27$; **4**) $8^2 = 4\cdot 16 = 2\cdot 32$; **5**) $6^2 = 2\cdot 18 = 3\cdot 12 = 4\cdot 9$.

Astfel, $n = 36$.