Olimpiada Republicană la Matematică

Prima zi, 29 februarie 2020, Clasa a X–a

Barem de evaluare

10.1. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $2020^{x^2-2x}+\dfrac{x^2-2x}{2020^x}=1$.

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Se studiază cazul $x^2-2x<0$.	2p.
2	Se studiază cazul $x^2-2x>0$.	2p.
3	Se studiază cazul $x^2-2x=0$.	2p.
4	Obţinerea răspunsului corect în rezultatul studiului celor trei cazuri.	1p.
	Punctaj total	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

10.2. Determinaţi cea mai mare valoare posibilă a raportului dintre suma cifrelor unui număr de patru cifre şi însuşi numărul.

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Scrierea raportului $\dfrac{\overline{abcd}}{a+b+c+d}=\dfrac{1000a+100b+10c+d}{a+b+c+d}$ (sau raportului invers).	1p.
2	Se obţine descompunerea $\dfrac{\overline{abcd}}{a+b+c+d}=1+\dfrac{999a+99b+9c}{a+b+c+d}$.	1p.
3	Se obţine $\dfrac{\overline{abcd}}{a+b+c+d}\ge 1+\dfrac{999a+99b+9c}{a+b+c+9}$.	1p.
4	Se obţine $\dfrac{\overline{abcd}}{a+b+c+d}\ge 1000-\dfrac{900b+990c+999\cdot 9}{b+c+10}$.	1p.
5	Se obţine $\dfrac{\overline{abcd}}{a+b+c+d}\ge 100-\dfrac{90c-9}{c+10}$.	1p.
6	Se obţine $\dfrac{\overline{abcd}}{a+b+c+d}\ge 10+\dfrac{909}{19}=\dfrac{1099}{19}$.	1p.
7	Se obţine răspunsul corect $\dfrac{19}{1099}$.	1p.
	Punctaj total	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

10.3. În interiorul triunghiului isoscel $ABC\ (AC = BC)$ cu $m(\angle C) = 80^\circ$ este situat punctul P astfel încât $m(\angle PAB) = 30^\circ$ şi $m(\angle PBA) = 10^\circ$. Determinaţi măsura în grade a unghiului CPB.

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Se obţin triunghiurile PBD şi ACD isoscele.	1p.
2	Se obţine $AP = CD$.	1p.
3	Se obţine $\triangle AFB$ - isoscel.	1p.
4	Se obţine $\triangle APF$ - isoscel.	1p.
5	Se obţine $\triangle CED \equiv \triangle PEF$.	1p.
6	Se obţine $m(\angle CPE) = 30^\circ$.	1p.
7	Se obţine $m(\angle CPB) = 70^\circ$.	1p.
	Punctaj total	**7 puncte**

Remarcă: *În caz dacă valoarea unghiului este obţinută într-o formă care nu conduce imediat la valoarea în grade a unghiului, pentru problemă se acordă cel mult 3 puncte.*

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

10.4. Demonstraţi că pentru orice numere reale $a, b, c, d > 0$ are loc relaţia

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} + \sqrt{\frac{b}{c+d+a}} + \sqrt{\frac{c}{d+a+b}} + \sqrt{\frac{d}{a+b+c}} > 2.$$

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Se obţine $\sqrt{\frac{b+c+d}{a}} \le \frac{a+b+c+d}{2a}$.	2p.
2	Se obţine $\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} \ge \frac{2a}{a+b+c+d}$.	1p.
3	Se determină în mod analog relaţiile $\sqrt{\frac{b}{c+d+a}} \ge \frac{2b}{a+b+c+d}$, $\sqrt{\frac{c}{d+a+b}} \ge \frac{2c}{a+b+c+d}$ şi $\sqrt{\frac{d}{a+b+c}} \ge \frac{2d}{a+b+c+d}$.	1p.
4	Se obţine $\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} + \sqrt{\frac{b}{c+d+a}} + \sqrt{\frac{c}{d+a+b}} + \sqrt{\frac{d}{a+b+c}} \ge \frac{2(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = 2$.	1p.
5	Se demonstrează că egalitate nu are loc.	2p.
	Punctaj total	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*