

Республиканская Олимпиада по Математике
Первый день, 29 февраля 2020 года, X-й класс
Схема оценивания

10.1. Решить на множестве \mathbb{R} уравнение $2020^{x^2-2x} + \frac{x^2-2x}{2020^x} = 1$.		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Изучение случая $x^2 - 2x < 0$.	26.
2	Изучение случая $x^2 - 2x > 0$.	26.
3	Изучение случая $x^2 - 2x = 0$.	26.
4	Получение правильного ответа в результате исследуемых трёх случаев.	16.
Общее количество баллов		7 баллов

Примечание: Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.

10.2. Найдите наибольшее возможное значение отношения суммы цифр четырёхзначного числа к самому числу.		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Запись отношения $\frac{\overline{abcd}}{a+b+c+d} = \frac{1000a+100b+10c+d}{a+b+c+d}$ (или обратное отношение).	16.
2	Получение разложения $\frac{\overline{abcd}}{a+b+c+d} = 1 + \frac{999a+99b+9c}{a+b+c+d}$.	16.
3	Получение $\frac{\overline{abcd}}{a+b+c+d} \geq 1 + \frac{999a+99b+9c}{a+b+c+9}$.	16.
4	Получение $\frac{\overline{abcd}}{a+b+c+d} \geq 1000 - \frac{900b+990c+999 \cdot 9}{b+c+10}$.	16.
5	Получение $\frac{\overline{abcd}}{a+b+c+d} \geq 100 - \frac{90c-9}{c+10}$.	16.
6	Получение $\frac{\overline{abcd}}{a+b+c+d} \geq 10 + \frac{909}{19} = \frac{1099}{19}$.	16.
7	Получение правильного ответа $\frac{19}{1099}$.	16.
Общее количество баллов		7 баллов

Примечание: Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.

10.3. Внутри равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC$) с $m(\angle C) = 80^\circ$ расположена точка P так что $m(\angle PAB) = 30^\circ$ и $m(\angle PBA) = 10^\circ$. Найдите градусную меру угла CPB .

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Получение равнобедренных треугольников PBD и ACD .	16.
2	Получение $AP = CD$.	16.
3	Получение что $\square AFB$ - равнобедренный.	16.
4	Получение что $\square APF$ - равнобедренный.	16.
5	Получение $\square CED \cong \square PEF$.	16.
6	Получение $m(\angle CPE) = 30^\circ$.	16.
7	Получение $m(\angle CPB) = 70^\circ$.	16.
Общее количество баллов		7 баллов

Примечание: В случае, если значение угла получено в форме, которая не приводит непосредственно к градусной мере угла, за задачу присуждается не более 3 баллов.

Примечание: Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.

10.4. Докажите, что для любых действительных чисел $a, b, c, d > 0$ справедливо неравенство

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} + \sqrt{\frac{b}{c+d+a}} + \sqrt{\frac{c}{d+a+b}} + \sqrt{\frac{d}{a+b+c}} > 2.$$

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Получение $\sqrt{\frac{b+c+d}{a}} \leq \frac{a+b+c+d}{2a}$.	26.
2	Получение $\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} \geq \frac{2a}{a+b+c+d}$.	16.
3	Получение аналогичных соотношений $\sqrt{\frac{b}{c+d+a}} \geq \frac{2b}{a+b+c+d}$, $\sqrt{\frac{c}{d+a+b}} \geq \frac{2c}{a+b+c+d}$ и $\sqrt{\frac{d}{a+b+c}} \geq \frac{2d}{a+b+c+d}$.	16.
4	Получение $\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} + \sqrt{\frac{b}{c+d+a}} + \sqrt{\frac{c}{d+a+b}} + \sqrt{\frac{d}{a+b+c}} \geq \frac{2(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = 2$.	16.
5	Доказывается, что равенство не имеет место.	26.
Общее количество баллов		7 баллов

Примечание: Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.