Olimpiada Republicană la Matematică
A doua zi, 1 martie 2020, Clasa X–a

Soluţii

10.5. Demonstrați că orice mulțime alcătuită din 112 numere naturale mai mici decât 1000, conține două numere diferența cărora este un număr de trei cifre de forma $\overline{aaa}$, $a \geq 1$.

Soluţie: Fie $X = \{x_1, x_2, ..., x_{112}\}$ unde $x_i \in \square$ și $x_i < 1000$, $\forall i = \overline{1, 112}$.

Împărțind cu rest x_i la 111, obținem $x_i = 111 \cdot q_i + r_i$, unde q_i - cifră și $r_i \in \{0, 1, ..., 110\}$.

Conform principiului Dirichlet există x_m și x_n, $m \neq n$ astfel încât $r_m = r_n$.

Fie pentru determinare $x_m > x_n$. Atunci

$x_m - x_n = 111 \cdot q_m + r_m - (111 \cdot q_n + r_n) = 111(q_m - q_n)$, unde $q_m - q_n = a$ - cifră nenulă.

Deci $x_m - x_n = 111 \cdot a = \overline{aaa}$.

10.6. Determinați toate numerele întregi n pentru care numărul $A = \sqrt[3]{n + \sqrt[3]{n-1}}$ este rațional.

Soluţie: Fie $A \in \square$. Atunci $\exists x \in \square : x^3 = n + \sqrt[3]{n-1}$. $\sqrt[3]{n-1} = x^3 - n \in \square \Rightarrow \exists y \in \square : y^3 = n - 1$.

$n = y^3 + 1$. Deci $x^3 = y^3 + y + 1$.

Dacă $n > 1$, atunci $y > 0$. Prin urmare $y^3 < x^3 = y^3 + y + 1 < y^3 + 3y^2 + 3y + 1 = (y+1)^3$.

Deoarece $x, y \in \square$ inegalitatea $y^3 < x^3 < (y+1)^3$ este imposibilă.

Dacă $n = 1$, atunci $A = 1 \in \square$.

Dacă $n = 0$, atunci $A = -1 \in \square$.

Dacă $n < 0$, atunci $y < -1$. Prin urmare $(y-1)^3 = y^3 - 3y^2 + 3y - 1 < y^3 + y + 1 = x^3 < y^3$.

Deoarece $x, y \in \square$ inegalitatea $(y-1)^3 < x^3 < y^3$ este imposibilă.

Răspuns: $n = 0, n = 1$.

10.7. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $16x+(x-1)\cdot 4^{x+1}=x^2(4^x+8+4^{\frac{1}{x}})$.
Soluţie: DVA: $x \neq 0$.

Ecuația poate fi scrisă în forma $x^2\cdot 4^{\frac{1}{x}}+(2-x)^2\cdot 4^x=8x(2-x)$.

Observăm că $x=2$ nu este soluție.

Deoarece $x\neq 2$ ecuația poate fi adusă la forma $\frac{x}{2-x}\cdot 4^{\frac{1}{x}}+\frac{2-x}{x}\cdot 4^x=8$.

Dacă $\frac{x}{2-x}<0$, atunci partea stângă a ecuației este număr negativ și în acest caz ecuația nu are soluții. Prin urmare $\frac{x}{2-x}>0$, adică $x\in(0;2)$. Utilizând relația dintre media aritmetică și media geometrică, obținem $\frac{x}{2-x}\cdot 4^{\frac{1}{x}}+\frac{2-x}{x}\cdot 4^x\geq 2\cdot\sqrt{\frac{x}{2-x}\cdot 4^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{2-x}{x}\cdot 4^x}=2\cdot\sqrt{4^{\frac{1}{x}+x}}=2^{\frac{1}{x}+x+1}$.

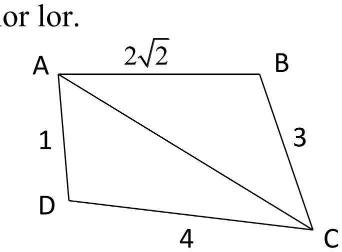
Deoarece $x\in(0;2)$, urmează $x+\frac{1}{x}\geq 2$. Prin urmare $\frac{x}{2-x}\cdot 4^{\frac{1}{x}}+\frac{2-x}{x}\cdot 4^x\geq 2^{2+1}=8$.

Egalitatea are loc când $\begin{cases}\frac{x}{2-x}\cdot 4^{\frac{1}{x}}=\frac{2-x}{x}\cdot 4^x\\ x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1\in(0;2)$.

Răspuns: $S=\{1\}$.

10.8. Aflați aria maximală posibilă a patrulaterului lungimile laturilor căruia sunt egale cu $1\ cm$, $2\sqrt{2}\ cm$, $3\ cm$ și $4\ cm$.
Soluţie: Evident este faptul că patrulaterul de arie maximală este patrulater convex.

Fie $ABCD$ un patrulater convex. Dacă modificăm configurația patrulaterului doar schimbând cu locurile două laturi vecine, atunci aria patrulaterului nu se schimbă. Deci putem considera că laturile lui sunt aranjate în ordine crescătoare a lungimilor lor.



$A_{ABCD}=A_{ABC}+A_{ADC}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\cdot\sin(\angle B)+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4\cdot\sin(\angle D)\leq$

$\leq 3\sqrt{2}+2$.

Dacă deformăm patrulaterul astfel încât latura de lungimea 1 să fie perpendiculară pe cea de lungimea 4, atunci și cea de lungimea $2\sqrt{2}$ va fi perpendiculară pe cea de lungimea 3, deoarece $1^2+4^2=17=\left(2\sqrt{2}\right)^2+3^2$. Atunci aria patrulaterului va fi

$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3=2+3\sqrt{2}.$ Deci aria maximală este $2+3\sqrt{2}\ cm^2$.

Răspuns: $2+3\sqrt{2}\ cm^2$.