Республиканская Олимпиада по Математике
первый день, 29 февраля 2020, XI–й класс
Схема оценки работ

11.1. *Для каких действительных значений параметра* a *график функции* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=x^4-8x^3+14x^2+ax$$

имеет ось симметрии, параллельную прямой $x=0$*?*

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Запись уравнения оси симметрии: $x=c$.	1
2	Выполнение замены $t=x-c$ и вывод утверждения что график функции $f(t)$, как функции от t, симметричен относительно оси Oy.	1
3	Представление выражений $(t+c)^4$, $(t+c)^3$ și $(t+c)^2$.	1
4	Вычисление коэффициентов функции $f(t)$.	1
5	Доказательство утверждения, что функция $f(t)$ является четной, и поэтому все коэффициенты, соответствующие нечетным степеням t, равны 0.	1
6	Нахождение значения $c=2$.	1
7	Получение решения - значения $a=8$.	1
	Общее количество баллов	**7 баллов**

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

11.2. *Задана последовательность* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *такая, что* $a_1=1$ *и* $a_{m+n}+a_{m-n}=\frac{1}{2}(a_{2m}+a_{2n})$, $\forall m\ge n\ge 0$. *Найти* a_{2020}.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Вычисление элемента $a_0=0$.	1
2	Доказательство формулы $a_{2m}=4a_m$, $\forall m\ge 0$.	1
3	Доказательство формулы $a_{2n+2}+a_2=2(a_{n+2}+a_n)$, $\forall n\ge 0$.	1
4	Доказательство формулы $a_{2n+2}+a_2=4a_{n+1}+4$, $\forall n\ge 0$.	1
5	Получение реккурентной формулы $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$, $\forall n\ge 0$.	1
6	Вывод формулы $a_n=n^2$, $\forall n\ge 0$.	1
7	Вычисление значения $a_{2020}=2020^2$.	1
	Общее количество баллов	**7 баллов**

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

11.3. *Для каких действительных значений параметра* $\boldsymbol{\alpha}$ *уравнение* $\sin 3x = \boldsymbol{\alpha}\sin x + (4-2\lvert\boldsymbol{\alpha}\rvert)\sin^2 x$ *имеет то же множество действительных решений, что и уравнение* $\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2\sin x\cos 2x$*?*		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Доказательство утверждения, что уравнение без параметра эквивалентно следующему: $\sin x \in \{0, 1/2\}$.	1
2	Проверка того, что решение $\sin x = 0$ удовлетворяет уравнению с параметром из условия задачи.	1
3	В случае $\sin x \neq 0$, вывод эквивалентной формы $3 - 4\sin^2 x = \boldsymbol{\alpha} + (4-2\lvert\boldsymbol{\alpha}\rvert)\sin x$ для уравнения с параметром из условия задачи.	1
4	Вывод неравенства $\boldsymbol{\alpha} \geq 0$.	1
5	При $\boldsymbol{\alpha} \geq 0$ и $\sin x \notin \{0, 1/2\}$, вывод эквивалентной формы $\sin x = \dfrac{\boldsymbol{\alpha}-3}{2}$.	1
6	Доказательство того, что либо $\dfrac{\boldsymbol{\alpha}-3}{2} = 0$, либо $\dfrac{\boldsymbol{\alpha}-3}{2} = \dfrac{1}{2}$, либо $\left\lvert\dfrac{\boldsymbol{\alpha}-3}{2}\right\rvert > 1$.	1
7	Вывод окончательного ответа: $\boldsymbol{\alpha} \in [0,1) \cup \{3,4\} \cup (5, +\infty)$.	1
	Общее количество баллов	**7 баллов**

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

11.4. *Пусть в тетраэдре пересекаются два отрезка, которые соединяют концы некоторого ребра с центрами окружностей, вписанных в противоположные этим концам грани. Доказать, что тогда два отрезка, которые соединяют концы ребра, скрещивающегося с исходным ребром, с центрами окружностей, вписанных в оставшиеся две противоположные грани, также пересекаются.*		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Концы ребра и ицентры вписанных окружностей лежат в одной плоскости.	1
2	Биссектрисы углов *A* и *B*, взятые в противоположных гранях, пересекаются.	1
3	Применение теоремы о биссектрисе к биссектрисам *AP* и *BP*.	1
4	Вывод отношения *AC/BC = AS/BS*.	1
5	Биссектрисы углов *S* и *C*, взятые в оставшейся паре противоположных граней, пересекаются.	1
6	Концы ребра, скрещивающегося с исходным ребром, и центры окружностей, вписанных в каждую из оставшихся граней, лежат в одной плоскости.	1
7	Завершение доказательства задачи.	1
	Общее количество баллов	**7 баллов**

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*