Olimpiada Republicană la Matematică
Ziua a doua, 1 martie 2020, Clasa a XII–a

Soluții

12.5. Fie funcția continuă $f: (1; +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+1)^5}}$. Determinați primitivele $F: (1; +\infty) \to \mathbb{R}$ ale funcției f.

Soluție:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+1)^5}} = \int \frac{x\,dx}{(x-1)(x+1)\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}} = \left| \begin{array}{c} t = \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} \\ x = \frac{2}{t^4-1}+1 \\ dx = -\frac{8t^3}{(t^4-1)^2}dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{2}{t^4-1}+1}{\frac{2}{t^4-1}\cdot\frac{2t^4}{t^4-1}\cdot t}\cdot\frac{-8t^3}{(t^4-1)^2}dt = -2\int\frac{1}{t^2}\left(\frac{2}{t^4-1}+1\right)dt =$$

$$= -2\int\left(\frac{1}{t^2}\cdot\frac{2}{t^4-1}+\frac{1}{t^2}\right)dt = \frac{2}{t} - 2\int\frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= \frac{2}{t} - 2\int\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{t^2-1}dt + 2\int\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{t^2+1}dt =$$

$$= \frac{2}{t} - 2\int\left(\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{t^2}\right)dt + 2\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt = \ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right) - 2\operatorname{arctg} t - \frac{2}{t} + C =$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1}}\right) - 2\operatorname{arctg}\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} - 2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} + C.$$

12.6. Fie paralelipipedul $ABCDA_1B_1C_1D_1$, în care $m(\angle A_1AD) = m(\angle A_1AB) = m(\angle DAB) = 60°$, iar $C_1A_1 = \sqrt{7}$ cm, $C_1B = \sqrt{13}$ cm, $C_1D = \sqrt{19}$ cm. Determinați distanța de la punctul A la planul A_1BD.

Soluție:

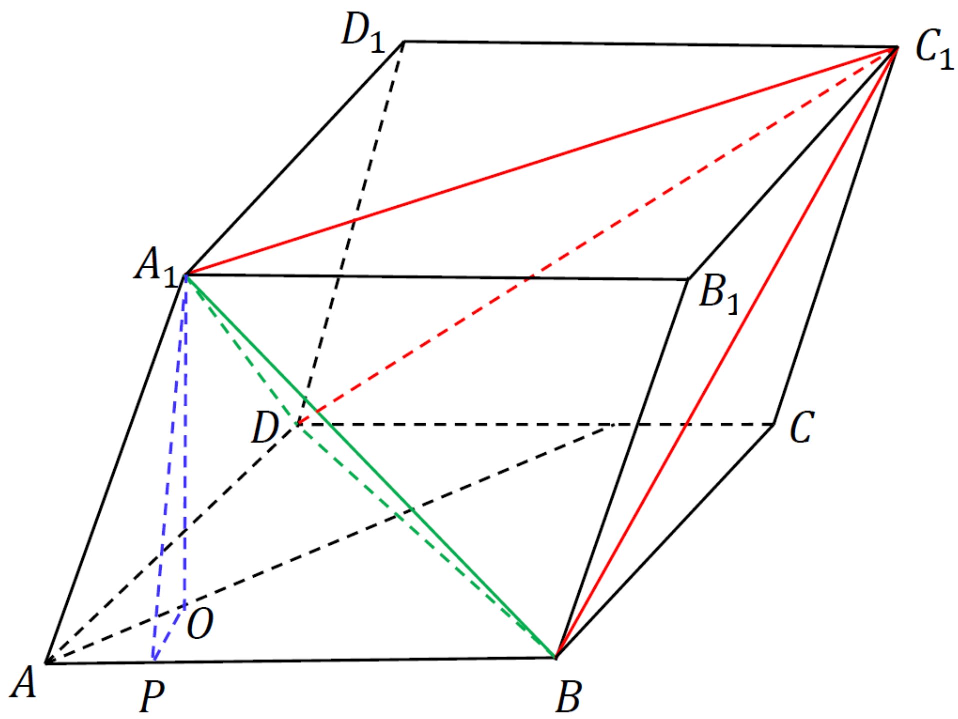
Aplicând teorema cosinusurilor, obținem sistemul

$$\begin{cases} AB^2 + AD^2 + AB\cdot AD = 7 \\ AD^2 + A_1A^2 + AD\cdot A_1A = 13 \\ AB^2 + A_1A^2 + AB\cdot A_1A = 19 \end{cases}.$$

Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} AB^2 + AD^2 + AB \cdot AD = 7 \\ AD^2 + A_1A^2 + AD \cdot A_1A = 13 \\ AB^2 + A_1A^2 + AB \cdot A_1A = 19, \end{cases}$$

obținem $AD = 1$ cm, $AB = 2$ cm, $A_1A = 3$ cm.



Fie O - proiecția punctului A_1 pe planul ABD, iar $OP \perp AB, P \in (AB)$.

Întrucât $m(\angle A_1AD) = m(\angle A_1AB) = m(\angle DAB) = 60°$, obținem că $m(\angle OAP) = 30°$.

Atunci $AP = \frac{3}{2}$ cm, $AO = \sqrt{3}$ cm, $A_1O = \sqrt{6}$ cm.

Atunci $\mathcal{V}_{A_1ABD} = \frac{1}{3} A_{\Delta ABD} \cdot A_1O = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (cm^3).

Aplicăm teorema cosinusurilor și obținem $A_1D = A_1B = \sqrt{7}$ (cm), $BD = \sqrt{3}$ (cm).

Atunci $\mathcal{V}_{A_1ABD} = \frac{1}{3} A_{\Delta A_1BD} \cdot AK = \frac{5\sqrt{3}}{12} \cdot AK$, unde K este proiecția punctului A pe planul A_1BD.

Obținem $AK = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ cm.

12.7. Fie numerele complexe z_1, z_2, z_3, astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ și $z_1z_2z_3 \neq -1$. Arătați că

$$w = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3}{1 + z_1z_2z_3}$$

este un număr real.

Soluţie:

Observăm că

$$|z_i| = 1 \Rightarrow z_i\overline{z_i} = 1, i = 1,2,3.$$

Atunci

$$\overline{w} = \overline{\left(\frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3}{1 + z_1z_2z_3}\right)} = \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} + \overline{z_1}\overline{z_2} + \overline{z_1}\overline{z_3} + \overline{z_2}\overline{z_3}}{1 + \overline{z_1}\overline{z_2}\overline{z_3}} =$$

$$= \frac{z_1z_2z_3(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} + \overline{z_1}\overline{z_2} + \overline{z_1}\overline{z_3} + \overline{z_2}\overline{z_3})}{z_1z_2z_3(1 + \overline{z_1}\overline{z_2}\overline{z_3})} =$$

$$= \frac{z_1\overline{z_1}z_2z_3 + z_1z_2\overline{z_2}z_3 + z_1z_2z_3\overline{z_3} + z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2}z_3 + z_1\overline{z_1}z_2z_3\overline{z_3} + z_1z_2\overline{z_2}z_3\overline{z_3}}{z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2}z_3\overline{z_3} + z_1z_2z_3} = w.$$

Am obținut astfel $w = \overline{w}$, ceea ce implică $w \in \mathbb{R}$.

12.8. Determinați funcțiile continue $f: \left[\frac{1}{e^2}; e^2\right] \to \mathbb{R}$, pentru care

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{1 + e^x}} f(e^{-x})dx - \int_{-2}^{2} f^2(e^x)dx = \frac{1}{2}.$$

Soluţie:

Obținem

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{1 + e^x}} f(e^{-x})dx = \left| \begin{matrix} x = -t \\ dx = -dt \\ x = -2 \Rightarrow t = 2 \\ x = 2 \Rightarrow t = -2 \end{matrix} \right| = \int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-t}}} f(e^t)dt.$$

Atunci

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{1 + e^x}} f(e^{-x})dx - \int_{-2}^{2} f^2(e^x)dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{-2}^{2} \left(f^2(e^x) - \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-x}}} f(e^x)\right)dx + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{-2}^{2} \left(f(e^x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-x}}}\right)^2 dx + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \int_{-2}^{2} \frac{dx}{1 + e^{-x}} = 0 \qquad (1)$$

Calculăm

$$\int_{-2}^{2} \frac{dx}{1 + e^{-x}} = \int_{-2}^{2} \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1} = \ln(e^x + 1)|_{-2}^{2} = \ln(e^2 + 1) - \ln(e^{-2} + 1) = 2$$

și obținem

$$(1) \Leftrightarrow \int_{-2}^{2} \left(f(e^x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-x}}}\right)^2 dx = 0.$$

Ținând cont de faptul că funcția $h(x) = \left(f(e^x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+e^{-x}}}\right)^2$ este continuă și nenegativă pe $[-2; 2]$, obținem că ultima egalitate este echivalentă cu $f(e^x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+e^{-x}}} = 0, \forall x \in [-2; 2]$.

Se cunoaște că $h(x) = 0, \forall x \in [a; b]$ implică $\int_a^b h(x)dx = 0$.

Pentru a demonstra veridicitatea implicației inverse (adică $\int_a^b h(x)dx = 0$, $h: [a; b] \to \mathbb{R}$, h - continuă pe $[a; b]$, $h(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$ implică $h(x) = 0, \forall x \in [a; b]$) vom presupune contrariul. Presupunem că $\int_a^b h(x)dx = 0$, $h: [a; b] \to \mathbb{R}$, h - continuă pe $[a; b]$, $h(x) \geq 0$, $\forall x \in [a; b]$ dar există $x_0 \in [a; b]$, pentru care $h(x_0) \neq 0$. Din continuitatea funcției h rezultă existența intervalului $[x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon] \subset [a; b]$, $\varepsilon > 0$, astfel încât $h(x) > 0$, $\forall x \in [x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon]$. Aceasta implică $\int_a^b h(x)dx \geq \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0-\varepsilon} h(x)dx > 0$, ceea ce contrazice presupunerea $\int_a^b h(x)dx = 0$.

Astfel obținem $f(e^x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+e^{-x}}} = 0, \forall x \in [-2; 2]$, ceea ce implică

$$f(t) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{t}{1+t}}, \forall t \in \left[\frac{1}{e^2}; e^2\right].$$