Olimpiada Republicană la Matematică
Prima zi, 29 februarie 2020, Clasa a VII–a

Soluții

7.1. Pe un vapor s-au întâlnit 100 de persoane, fiecare fiind cetățean al unuia dintre orașele A, B sau C. Fiecare cetățean al orașului A întotdeauna spune adevărul, fiecare cetățean al orașului B întotdeauna minte, iar fiecare cetățean al orașului C după orice minciună spune un adevăr, iar după fiecare adevăr spune o minciună, dar nu se știe cu ce începe. Căpitanul vaporului, dorind să afle câți cetățeni sunt din fiecare oraș, le-a adresat tuturor celor 100 de persoane trei întrebări. La prima întrebare ”*Sunteți din orașul A?*” au răspuns afirmativ 60 de persoane. La a doua întrebare ”*Sunteți din orașul C?*” au răspuns afirmativ 45 de persoane, iar la a treia întrebare ”*Sunteți din orașul B?*” au răspuns afirmativ 37 de persoane. Determinați numărul de cetățeni din fiecare oraș și câte persoane din orașul C au spus adevărul, răspunzând la prima întrebare.

Rezolvare:

Notăm prin a – numărul persoanelor din orașul A, b – numărul persoanelor din orașul B, c_a – numărul persoanelor din orașul C care spun alternativ adevăr-minciună iar prin c_m – numărul persoanelor din orașul C care spun alternativ minciună – adevăr. Atunci $a+b+c_a+c_m=100$. Răspunsul ”*Da*” la prima întrebare *”Sunteți din orașul A?”* au dat persoanele din orașul A, B și cei din C care răspund alternativ minciună – adevăr. Astfel, $a+b+c_m=60$. Obținem $c_a=40$. Răspunsul ”*Da*” la a doua întrebare ”*Sunteți din orașul C?*” a fost dat de către persoanele din orașul B și cei din C care răspund alternativ adevăr-minciună. Astfel $b+c_a=45 \Longrightarrow b=5$. Răspunsul ”*Da*” la a treia întrebare ”*Sunteți din orașul B?*” au răspuns persoanele din orașul C care răspund alternativ minciună – adevăr$\Longrightarrow c_m=37$. Rezultă că $a=18$.

Răspuns: 18 persoane sunt din orașul A, 5 persoane sunt din orașul B, 77 persoane sunt din orașul C (dintre care 40 care răspund alternativ adevăr-minciună, 37 – persoane care răspund alternativ minciună – adevăr).

7.2. Fie triunghiul ABC cu înălțimile BE și CF, $E \in (AC), F \in (AB)$. Punctul P aparține segmentului (BE) astfel încât $BP=AC$, iar punctul Q aparține prelungirii segmentului (CF), astfel încât $F \in (CQ)$ și $CQ=AB$. Determinați măsura unghiului QAP.

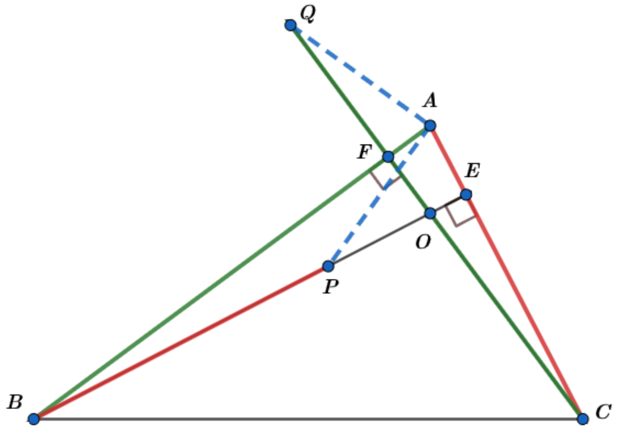
Rezolvare:

Fie $FC \cap BE=\{O\}$. Deoarece $m(\measuredangle BFO)=m(\measuredangle CEO)$ și $m(\measuredangle FOB)=m(\measuredangle EOC)$ (ca unghiuri opuse la vârf), rezultă că $m(\measuredangle FBO)=m(\measuredangle ECO)$. Considerăm ΔABP și ΔQCA. Deoarece

$$\left.\begin{array}{r} AB=QC \\ BP=AC \\ m(\measuredangle ABP)=m(\measuredangle QCA) \end{array}\right\} \xRightarrow{L.U.L} \Delta ABP \equiv \Delta QCA \Rightarrow m(\measuredangle BAP)=m(\measuredangle CQA).$$

Atunci $m(\measuredangle QAP)=$ $m(\measuredangle QAF)+m(\measuredangle FAP)=m(\measuredangle QAF)+m(\measuredangle FQA)=180^{\circ}-90^{\circ}=90^{\circ}$.

Răspuns: $m(\measuredangle QAP)=90^{\circ}$.



7.3. Determinați toate cifrele (a, b, c, m, n) pentru care $\overline{0,(abc)} \cdot \overline{3,(mn)} = 3$.

Rezolvare:

Deoarece $\overline{0,(abc)} = \frac{\overline{abc}}{999}$ și $\overline{3,(mn)} = \frac{\overline{3mn}-3}{99} = \frac{297+\overline{mn}}{99}$, obținem $\overline{0,(abc)} \cdot \overline{3,(mn)} = 3 \Leftrightarrow \frac{\overline{abc}}{999} \cdot \frac{297+\overline{mn}}{99} = 3 \Leftrightarrow \overline{abc} \cdot (297 + \overline{mn}) = 3^6 \cdot 11 \cdot 37 \Rightarrow 3^6 \cdot 11 \cdot 37 \,\vdots\, \overline{abc}$. Deoarece $297 + \overline{mn} \leq 297 + 98 = 395 \Rightarrow \overline{abc} \geq 752$. Din $3^6 \cdot 11 \cdot 37 \,\vdots\, \overline{abc}$ și $\overline{abc} \geq 752$ obținem $\overline{abc} = 891$. Astfel, $297 + \overline{mn} = 333 \Rightarrow \overline{mn} = 36$.

Răspuns: $a = 8, b = 9, c = 1, m = 3, n = 6$.

7.4. Determinați numerele naturale prime a, b, c, știind că:

$$\frac{2a + 4b - c + 7}{a + 3b + c + 2} = \frac{5a + b + 3c - 22}{a - 2b + 2c + 30} = \frac{c - 3b - 6a - 14}{3b + 3c - 90}.$$

Rezolvare:

Conform proprietății șirurilor de rapoarte egale, adunând numitorii și numărătorii între ei obținem:

$$\frac{2a + 4b - c + 7}{a + 3b + c + 2} = \frac{5a + b + 3c - 22}{a - 2b + 2c + 30} = \frac{c - 3b - 6a - 14}{3b + 3c - 90} = \frac{a + 2b + 3c - 29}{2a + 4b + 6c - 58} = \frac{1}{2}.$$

Astfel obținem

$$\frac{2a + 4b - c + 7}{a + 3b + c + 2} = \frac{5a + b + 3c - 22}{a - 2b + 2c + 30} = \frac{c - 3b - 6a - 14}{3b + 3c - 90} = \frac{1}{2}.$$

Din $\frac{2a+4b-c+7}{a+3b+c+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4a + 8b - 2c + 14 = a + 3b + c + 2 \Rightarrow 3a + 5b - 3c + 12 = 0$. Din ultima ecuație deducem $b \,\vdots\, 3$. Cum b – prim, rezultă $b = 3$. Pentru $b = 3$ obținem $3a - 3c + 27 = 0 \Rightarrow 3c - 3a = 27 \Rightarrow c - a = 9$. Din ultima egalitate rezultă că a și c sunt de parități diferite. Astfel $a = 2, c = 11$.

Răspuns: $a = 2$, $b = 3$, $c = 11$