Республиканская Олимпиада по Математике
Первый день, 29 февраля 2020 года, IX-й класс
Схема оценивания

Задача 9.1. Найти все натуральные числа n $(n>1)$, удовлетворяющие следующему условию: из множества чисел $\{1,2,3,\ldots,n\}$ можно удалить одно число так, что среднее арифметическое чисел множества изменилось на $\dfrac{1}{2020}$. Для каждого такого числа n указать и удалённое число.

Решение со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Находит среднее арифметическое M чисел множества $A=\{1,2,3,\ldots,n\}$	1 балл
2.	Обозначает удаленное число, например, через m и находит среднее M' арифметическое оставшихся чисел.	1 балл
3.	*Для* $M-M'>0$: Находит $\dfrac{2m-n-1}{2(n-1)}=\dfrac{1}{2020}$.	1 балл
4.	Получает $n=2020k+1,\ k\in N^*$.	1 балл
5.	Находит удаленное число $m=1011k+1,\ k\in N^*$.	1 балл
6.	*Для* $M'-M>0$: Находит $n=2020k+1,\ k\in N^*$.	1 балл
7.	Получает $m=1009k+1,\ k\in N^*$ и пишет правильный ответ.	1 балл
	Общая сумма баллов:	**7 баллов**

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

Задача 9.2. Окружность разделена 2020 точками на 2020 равных дуг. Пэкалэ утверждает, что может построить замкнутую ломанную линию с вершинами во всех этих точках так, чтобы любые два ее отрезка не были бы параллельными. Прав ли Пэкалэ?

Решение со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Кол-во баллов
1.	Обозначает точки числами 1,2,3,…,2020, а отрезок с концами *i, j* - через *ij* и находит условие параллелизма отрезков *ij* и *kl*: $i+j\equiv k+l\,(\mathrm{mod}\ 2020)$; a) для $i+j=k+l$ -- 1 балл; b) для $(k+l)-(i+j)=2020$ -- 1 балл; c) для объединения, $i+j\equiv k+l\,(\mathrm{mod}\ 2020)$ -- 1 балл.	3 балла
2.	Предполагает, что Пэкалэ прав и находит $(n_1+n_2)+(n_2+n_3)+\ldots+(n_{2020}+n_1)\equiv 0+1+2+3+\ldots+2019\,(\mathrm{mod}\ 2020)$.	2 балла
3.	Показывает, что $(n_1+n_2)+(n_2+n_3)+\ldots+(n_{2020}+n_1)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2020)$.	1 балл
4.	Показывает, что сумма $0+1+2+3+\ldots+2019$ неконгруэнтна с числом 0 по модулю 2020.	1 балл
5.	Противоречие, следовательно, Пэкалэ верить нельзя.	1 punct
	Общая сумма баллов:	**7 баллов**

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

Задача 9.3. Биссектрисы BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке O. Величина $\angle BOC$ равна 120^0. Описанная окружность треугольника BC_1O пересекает сторону BC в точке D. Доказать, что $AD \perp B_1C_1$.		
Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Доказано, что величина $\angle A = 60^0$ (1 б.) и что четырехугольник AB_1OC_1 может быть вписан в окружность (1 б).	2 баллла
2	Доказано, что четырехугольник OB_1CD вписан в окружность.	2 балла
3	Сделан вывод, что $\Delta AB_1C_1 \equiv \Delta DB_1C_1$.	2 балла
4	Точка D симметрична точке A относительно B_1C_1. Отсюда получает, что $AD \perp B_1C_1$, ч.т.д.	1 балл
	Общая сумма баллов:	**7 баллов**

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

Задача 9.4. Доказать, что для любых положительных чисел a, b, c справедливо неравенство $$\frac{a+b-2c}{b+c}+\frac{b+c-2a}{c+a}+\frac{c+a-2b}{a+b}\geq 0.$$ Когда выполнено равенство?		
Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Умножает неравенство на произведение знаменателей	1 балл
2.	Получает $a^3+b^3+c^3-2ab^2-2bc^2-2ca^2+a^2b+b^2c+c^2a\geq 0$.	2 балла
3.	Группирует слагаемые: $(a^3-2a^2c+c^2a)+(b^3-2ab^2+a^2b)+(c^3-2bc^2+b^2c)\geq 0$.	1 балл
4.	Получает $a(a^2-2ac+c^2)+b(b^2-2ab+a^2)+c(c^2-2bc+b^2)\geq 0$.	1 балл
5.	Приводит неравенство к виду $a(a-c)^2+b(b-a)^2+c(c-b)^2\geq 0$, верное и равносильное исходному неравенству.	1 балл
6.	Устанавливает, что равенство справедливо при $a=b=c$.	1 балл
	Общая сумма баллов:	**7 puncte**

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*