Республиканская Олимпиада по Математике
Второй день, 1 марта 2020 года, IX-й класс
Схема оценивания

Задача 9.5. Показать, что для каждого натурального ненулевого числа n существует последовательность из $2n+1$ натуральных последовательных чисел так, чтобы сумма квадратов первых $n+1$ из них равнялась бы сумме квадратов следущих n чисел. Проверить, если существует такая последовательность с числом 2020 в середине.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Обозначает, например, через k число в середине последовательности и выписывает последовательность	1 балл
2.	Приравнивает сумму квадратов первых $n+1$ чисел с суммой квадратов остальных n чисел последовательности	1 балл
3.	Приводит подобные члены и получает $k^2 = 2kn(n+1)$.	2 балла
4.	Так как $k \neq 0$, получает $k = 2n(n+1)$, ч.т.д.	1 балл
5.	Для $k = 2020$ получает $n(n+1) = 1010$ и	1 балл
6.	и показывает, что это уравнение не имеет решений в N^*.	1 балл
	Общая сумма баллов:	**7 баллов**

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

Задача 9.6. Найти все пары натуральных ненулевых чисел *p, q,* удовлетворяющих уравнению
$$3p^4 + 5q^4 + 15 = 13p^2q^2 .$$

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Показывает, что числа p , q не могут быть оба нечетными	2 балла
2.	Показывает, что числа *p, q* не могут быть оба четными (т.е. оба равными 2)	1 балл
3.	Показывает, что при *q = 2* уравнение не имеет решений	2 балла
4.	При *p = 2* находит единственное решение *(p, q) = (2, 3)*.	2 балла
	Общая сумма баллов	**7 баллов**

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

Задача 9.7. Дан остроугольный треугольник ABC с $AB > AC$. Точка F, расположенная на стороне BC, являе тся основанием высоты, опущенной из точки A, а точка H является ортоцентром треугольника ABC. На полупрямой $(BC$ берется точка D так, что $C \in (BD)$. Окружность, описанная около треугольника DFH пересекает отрезок (AD) в точке N так, что точка N принадлежит и окружности, описанной около треугольника ABC. Доказать, что прямая NH проходит через середину стороны BC.		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Доказал, что прямая NH перпендикулярна прямой AD.	1 балл
2.	Доказал, что $m(\angle EHK) = 180^0 - m(\angle A) = m(\angle BHC)$.	1 балл
3.	Доказал, что точка N является точкой пересечения окружности описанной около треугольника ABC с окружностью описанной около четырехугольника $AEHK$.	1 балл
4.	Доказал, что $m(\angle BPC) = 180^0 - m(\angle A) = m(\angle BHC)$.	1 балл
5.	Доказал, что отрезок AP является диаметром окружности описанной около треугольника ABC.	1 балл
6.	Доказал, что $m(\angle ABP) = 90^0 \Rightarrow BP \parallel CH$ и делает вывод, что четырехугольник $BPCH$ есть параллелограмм, в котором отрезок PH диагональ.	1 балл
7.	Делает вывод, что прямая NH проходит через середину стороны BC ч.т.д.	1 балл
	Общая сумма баллов:	**7 баллов**

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

Задача 9.8. Натуральные числа a, b, c, d и n удовлетворяют соотношениям $a^2 - b^2 = c^2 - d^2 = n$. Показать, что число $2(a+b)(c+d)(ac+bd-n)$ является квадратом некоторого натурального числа.		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Получает $E = 2(a+b)(c+d)(ac+bd-n) = (a+b)(c+d)(2ac+2bd-2n)$.	1 балл
2.	Использует равенство $2ac+2bd-2n = (b+d)^2 - (a-c)^2$.	2 балла
3.	Получает $(b+d)^2 - (a-c)^2 = (b+d-a+c)(b+d+a-c)$.	1 балл
4.	Из $E = (a+b)(c+d+b-a)\cdot(c+d)(a+b+d-c)$ получает $E = [(a+b)(c+d)+(a+b)(b-a)]\cdot[(c+d)(a+b)+(c+d)(d-c)]$.	2 балла
5.	Устанавливает, что $(a+b)(b-a) = (c+d)(d-c) = -n$.	1 балл
6.	Получает $E = \left[(a+b)(c+d)-n\right]\cdot\left[(a+b)(c+d)-n\right] = [(a+b)(c+d)-n]^2$, ч.т.д.	1 балл
	Punctaj total:	**7 puncte**

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*