A 69-A OLIMPIADĂ REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ

27 februarie – 2 martie 2026, Clasa a XI-a

BAREM DE EVALUARE – Prima zi

Remarcă. ***Rezolvarea corectă a oricărei probleme se apreciază cu 7 puncte.***

11.1. Demonstraţi că pentru orice $x > 0$ are loc inegalitatea: $e^x > 1 + x^2$.

Rezolvare cu barem de evaluare		
Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Arată egalitatea pentru $x = 0$.	1 punct
2.	Argumentează că e suficient de arătat $e^x > 2x$ pentru $x \geq 0$.	1 punct
3.	Arată că pentru $f(x) = e^x - 2x$ avem $f(x) \geq f(\ln 2) > 0$ pentru $x \geq 0$. • Arată $f'(x) = 0 \iff x = \ln 2$. .... 1p • Arată $f''(\ln 2) > 0$. .... 1p • Arată că $f(x) = e^x - 2x$ are minim unic în $x = \ln 2$. .... 1p • Arată că $f(x) \geq f(\ln 2) > 0$ pentru $x \geq 0$. 1p	4 puncte
3.	Conclude că $e^x > 1 + x^2$ pentru $x > 0$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

11.2. Fie M mijlocul unui arc de cerc $\overset{\frown}{AB}$, iar P un punct arbitrar pe acest arc.
Demonstraţi următoarea relaţie pentru lungimile segmentelor: $PA \cdot PB + PM^2 = AM^2$.

Rezolvare cu barem de evaluare		
Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Din teorema sinusului obţine $PA = 2R\sin\beta$, $PB = 2R\sin\alpha$	1 punct
2.	Obţine $PM = 2R\sin\frac{\lvert\alpha-\beta\rvert}{2}$ şi $AM = 2R\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ • Menţionează că $\measuredangle MAB = \measuredangle MBA = \frac{\alpha+\beta}{2}$ 1p	2 puncte
3.	Reduce problema la demonstrarea relaţiei $\sin\alpha \cdot \sin\beta + \sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} = \sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}$	1 punct
4.	Demonstrează 3. • Aplică corect formula $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$ 1p	3 puncte
	Punctaj total	7 puncte

11.3. a) Arătaţi că, dacă numărul zecimal $a = \overline{0,a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots}$ este un număr raţional, atunci există limita finită

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

b) Este adevărată afirmaţia reciprocă?

Rezolvare cu barem de evaluare		
Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Rezolvă corect cazul a). • Scrie numărul a ca fracţie periodică infinită. .... 1p • Obţine $S_n = S_k + md + r_n$ pentru $n > k$. .... 1p • Arată că $\frac{n-k}{p} - 1 < m \leq \frac{n-k}{p}$ .... 1p • Arată că $\frac{S_k}{n} + \frac{d}{p} - \frac{kd}{pn} - \frac{d}{n} < \frac{S_n}{n} \leq \frac{S_k}{n} + \frac{d}{p} - \frac{kd}{pn} + \frac{d}{n}$. .... 1p • Arată că există limita finită cerută $\lim_{n\to+\infty}(S_n/n)$. 1p	5 puncte
2.	Rezolvă corect cazul b). • Prezintă clar un exemplu corect. .... 1p • Demonstrează că exemplul verifică condiţiile. 1p	2 puncte
	Punctaj total	7 puncte

11.4. Determinaţi toate funcţiile continue $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ cu proprietatea:

$$f(x)+f\left(\frac{x}{4}\right)-2f\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{x},\ \text{pentru orice } x\geq 0.$$

Rezolvare cu barem de evaluare		
Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Demonstrează că $f(x)-f(\frac{x}{2})=\sqrt{x}\cdot\frac{1}{1-1/\sqrt{2}},\ \forall x\geq 0$ 1. Aplică relaţia funcţională pentru $x\mapsto \frac{x}{2},...,\frac{x}{2^n}$ .... 1p 2. Obţine $f(x)-f(\frac{x}{2})+f(\frac{x}{2^{n+2}})-f(\frac{x}{2^{n+1}})=\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{(\sqrt{2})^n}\right)$ .. 1p 3. Aplică continuitatea funcţiei f: $\lim_{n\to\infty} f(\frac{x}{2^n})=f(0)$ 1p	3 puncte
2.	Demonstrează că $f(x)-f(0)=\sqrt{x}\cdot\frac{1}{(1-1/\sqrt{2})^2},\ \forall x\geq 0$ • Aplică 1. pentru $x\mapsto \frac{x}{2},...,\frac{x}{2^n}$ .... 1p • Obţine $f(x)-f(\frac{x}{2^n})=\frac{\sqrt{x}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{(\sqrt{2})^n}\right)$ ....1p • Aplică continuitatea funcţiei f: $\lim_{n\to\infty} f(\frac{x}{2^n})=f(0)$ 1p	3 puncte
3.	Menţionează că pentru orice $c\in\mathbb{R}$, $f(x)=c+\sqrt{x}\cdot\frac{1}{(1-1/\sqrt{2})^2}$ este soluţie.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte