

69-Я РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

27 февраля – 2 марта 2026 г., XI класс

СХЕМА ПРОВЕРКИ ТЕСТА – Первый день

Примечание. *Правильное решение любой задачи оценивается в 7 баллов.*

11.1. Докажите, что для любого $x > 0$ имеет место неравенство: $e^x > 1 + x^2$.

Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Показывает равенство при $x = 0$.	1 балл
2.	Аргументирует, что достаточно показать, что $e^x > 2x$ для $x \geq 0$.	1 балл
3.	Показывает, что для $f(x) = e^x - 2x$ имеем $f(x) \geq f(\ln 2) > 0$ при $x \geq 0$. <ul style="list-style-type: none"> • Показывает $f'(x) = 0 \iff x = \ln 2$. 1б • Показывает $f''(\ln 2) > 0$. 1б • Показывает, что $f(x) = e^x - 2x$ имеет единственный минимум в $x = \ln 2$. 1б • Показывает, что $f(x) \geq f(\ln 2) > 0$ при $x \geq 0$. 1б 	4 балла
3.	Заключает, что $e^x > 1 + x^2$ для $x > 0$.	1 балл
Общее количество баллов		7 баллов

11.2. Пусть M – середина некоторой дуги окружности \widehat{AB} , а P – произвольная точка на этой дуге. Докажите следующее соотношение для длин отрезков: $PA \cdot PB + PM^2 = AM^2$.

Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Из теоремы синусов получает $PA = 2R \sin \beta$, $PB = 2R \sin \alpha$	1 балл
2.	Получает $PM = 2R \sin \frac{ \alpha - \beta }{2}$ и $AM = 2R \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$ <ul style="list-style-type: none"> • Указывает что $\angle MAB = \angle MBA = \frac{\alpha + \beta}{2}$ 1б 	2 балла
3.	Сводит задачу к доказательству тождества $\sin \alpha \cdot \sin \beta + \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} = \sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2}$	1 балл
4.	Доказывает 3. <ul style="list-style-type: none"> • Правильно применяет формулу $\sin \frac{\alpha + \beta}{2} + \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}$... 1б 	3 балла
Общее количество баллов		7 баллов

11.3. а) Покажите, что если десятичное число $a = \overline{0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots}$ является рациональным числом, то существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

б) Верно ли обратное утверждение?

Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	<p>Правильно решает вопрос а).</p> <ul style="list-style-type: none"> • Пишет число a как бесконечную периодическую дробь. 1б • Получает $S_n = S_k + md + r_n$ для $n > k$. 1б • Показывает, что $\frac{n-k}{p} - 1 < m \leq \frac{n-k}{p}$ 1б • Показывает, что $\frac{S_k}{n} + \frac{d}{p} - \frac{kd}{pn} - \frac{d}{n} < \frac{S_n}{n} \leq \frac{S_k}{n} + \frac{d}{p} - \frac{kd}{pn} + \frac{d}{n}$. 1б • Показывает, что существует искомый конечный предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n/n)$. 1б 	5 баллов
2.	<p>Правильно решает вопрос б).</p> <ul style="list-style-type: none"> • Представляет ясно правильный пример. 1б • Доказывает, что пример удовлетворяет условиям. 1б 	2 балла
Общее количество баллов		7 баллов

11.4. Найдите все непрерывные функции $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ со свойством:

$$f(x) + f\left(\frac{x}{4}\right) - 2f\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{x}, \text{ для всех } x \geq 0.$$

Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Доказывает что $f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{x} \cdot \frac{1}{1-1/\sqrt{2}}, \forall x \geq 0$ 1. Применяет функциональное уравнение для $x \mapsto \frac{x}{2}, \dots, \frac{x}{2^n} \dots\dots\dots 16$ 2. Получает $f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2^{n+2}}\right) - f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{(\sqrt{2})^n}\right)$ 16 3. Применяет непрерывность функции $f: \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0) \dots\dots\dots 16$	3 балла
2.	Demonstrează că $f(x) - f(0) = \sqrt{x} \cdot \frac{1}{(1-1/\sqrt{2})^2}, \forall x \geq 0$ • Применяет 1. для $x \mapsto \frac{x}{2}, \dots, \frac{x}{2^n} \dots\dots\dots 16$ • Получает $f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{\sqrt{x}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{(\sqrt{2})^n}\right) \dots\dots\dots 16$ • Применяет непрерывность функции $f: \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0) \dots\dots\dots 16$	3 балла
3.	Замечает что для любого $c \in \mathbb{R}$ функция $f(x) = c + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{(1-1/\sqrt{2})^2}$ – решение.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов