A 69-A OLIMPIADĂ REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ

27 februarie – 2 martie 2026, Clasa a XI-a

BAREM DE EVALUARE – A doua zi

Remarcă. ***Rezolvarea corectă a oricărei probleme se apreciază cu 7 puncte.***

11.5. Determinaţi toate numerele reale x_0, astfel încât tangenta la graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2$, dusă în punctul cu abscisa x_0, intersectează acest grafic în cel puţin încă un punct.

Rezolvare cu barem de evaluare		
Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Scrie corect ecuaţia tangentei.	1 punct
2.	Scrie ecuaţia pentru punctele de intersecţie $x^3 - x^2 = x_0^3 - x_0^2 + (3x_0^2 - 2x_0)(x - x_0)$	1 punct
3.	Obţine $(x - x_0)(x^2 + x(x_0 - 1) - 2x_0^2 + x_0) = 0$.	2 puncte
4.	Arată că pentru orice $x_0 \neq 1/3$ există un alt punct de intersecţie.	2 puncte
5.	Arată că pentru $x_0 = 1/3$ există doar un punct de intersecţie.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

11.6. a) Fie o funcţie continuă $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$. Arătaţi că dacă există limita $\lim_{x \to +\infty} f(f(x)) = +\infty$, atunci există şi limita $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) Este adevărată aceeaşi afirmaţie pentru orice funcţie continuă $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$?

Rezolvare cu barem de evaluare		
1.	Rezolvă corect cazul a). • Scrie condiţiile 1) şi 2) echivalente cu $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. .... 1p • Presupune că există $M > 0$ şi există un şir $(x_n) \to \infty$, astfel încât $\lvert f(x_n) \rvert < M, \forall n$. .... 1p • Arată că $f(f(x_n)) \to +\infty$ când $n \to +\infty$. .... 1p • Arată că funcţia continuă f este mărginită pe $[0, M]$ şi şirul $f(f(x_n))$ este mărginit. .... 1p • Obţine contradicţie cu $f(f(x_n)) \to +\infty$ când $n \to +\infty$ şi conclude că presupunerea e falsă şi că $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. 1p	5 puncte
2.	Rezolvă corect cazul b). • Prezintă clar un exemplu corect. .... 1p • Demonstrează că exemplul verifică condiţiile. 1p	2 puncte
	Punctaj total	7 puncte

11.7. În patrulaterul convex $ABCD$, bisectoarele unghiurilor ascuţite $\angle A$ şi $\angle D$ se intersectează în punctul de mijloc al laturii BC. Demonstraţi că $BC = 2\sqrt{AB \cdot CD}$.

Rezolvare cu barem de evaluare		
Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Consideră punctul $P = [AB \cap [DC$ şi mijlocul I al lui $[BC]$	1 punct
2.	Arată că $\triangle BPC$ este isoscel • Arată că I este intersecţia bisectoarelor $\triangle APD$ 1p	2 puncte
3.	Arată că $\triangle ABI \sim \triangle ICD$ • Arată $\measuredangle BIA = \frac{1}{2}\measuredangle PDA = \measuredangle CDI$ 2p	3 puncte
4.	Din 3. deduce $BC = 2\sqrt{AB \cdot CD}$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

11.8. Toate numerele $1, 2, \ldots, 100$ sunt scrise într-un mod arbitrar în celulele unui tabel de dimensiuni 10×10 (câte un număr în fiecare celulă). Se ştie că în fiecare rând numerele sunt plasate în ordine descrescătoare (de la stânga la dreapta).
Demonstraţi că există un rând, astfel încât suma tuturor numerelor din acest rând este mai mică decât suma tuturor numerelor din coloana a treia (de la stânga).

Rezolvare cu barem de evaluare		
Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Arată că suma numerelor $x_1 > x_2 > ... > x_{10}$ din coloana 3 este cel puţin $8x_{10} + 180$ • Arată că $x_1 \geq 80$ .... 1p • Arată că $x_2 \geq 72$ 2p	4 puncte
2.	Arată că suma numerelor din rândul lui x_{10} nu depăşeşte $8x_{10} + 171$	2 puncte
3.	Din 1. şi 2. obţine concluzia problemei	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

Notă. Nu se acordă puncte pentru considerarea cazurilor particulare.