

# 69-Я РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

27 февраля – 2 марта 2026 г., XI класс

СХЕМА ПРОВЕРКИ ТЕСТА – Второй день

**Примечание.** *Правильное решение любой задачи оценивается в 7 баллов.*

**11.5.** Найдите все действительные числа  $x_0$  такие, что касательная к графику функции  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - x^2$ , проведённая в точке с абсциссой  $x_0$ , пересекает этот график, по крайней мере, ещё в одной точке.

Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Правильно пишет уравнение касательной.	1 балл
2.	Пишет уравнение для точек пересечения $x^3 - x^2 = x_0^3 - x_0^2 + (3x_0^2 - 2x_0)(x - x_0)$	1 балл
3.	Получает $(x - x_0)(x^2 + x(x_0 - 1) - 2x_0^2 + x_0) = 0$ .	2 балла
4.	Показывает, что для любого $x_0 \neq 1/3$ существует другая точка пересечения.	2 балла
5.	Показывает, что для $x_0 = 1/3$ существует единственная точка пересечения.	1 балл
Общее количество баллов		7 баллов

**11.6.** а) Дана некоторая непрерывная функция  $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ . Покажите, что если существует предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = +\infty$ , то тогда существует и предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

б) Верно ли такое же утверждение для любой непрерывной функции  $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ ?

Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Правильно решает вопрос а). <ul style="list-style-type: none"> <li>• Пишет условия 1) и 2) эквивалентные <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty</math>. ..... 1б</li> <li>• Предполагает, что существует <math>M &gt; 0</math> и существует последовательность <math>(x_n) \rightarrow \infty</math> такие, что <math> f(x_n)  &lt; M, \forall n</math>. ..... 1б</li> <li>• Показывает, что <math>f(f(x_n)) \rightarrow +\infty</math> при <math>n \rightarrow +\infty</math>. ..... 1б</li> <li>• Показывает, что непрерывная функция <math>f</math> ограничена на <math>[0, M]</math> и последовательность <math>f(f(x_n))</math> ограничена. ..... 1б</li> <li>• Получает противоречие с <math>f(f(x_n)) \rightarrow +\infty</math> при <math>n \rightarrow +\infty</math> и заключает, что предположение ложно и что <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty</math>. ..... 1б</li> </ul>	5 баллов
2.	Правильно решает вопрос б). <ul style="list-style-type: none"> <li>• Представляет ясно правильный пример. .... 1б</li> <li>• Доказывает, что пример удовлетворяет условиям. .... 1б</li> </ul>	2 балла
Общее количество баллов		7 баллов

**11.7.** В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$ , биссектрисы острых углов  $\angle A$  и  $\angle D$  пересекаются в середине точки стороны  $BC$ . Докажите, что  $BC = 2\sqrt{AB \cdot CD}$ .

Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Рассматривает точку $P = [AB \cap [DC$ и середину $I$ отрезка $[BC]$	1 балл
2.	Доказывает что $\triangle BPC$ – равнобедренный <ul style="list-style-type: none"> <li>• Доказывает что <math>I</math> – точка пересечения биссектрис <math>\triangle APD</math> ..... 1б</li> </ul>	2 балла
3.	Доказывает что $\triangle ABI \sim \triangle ICD$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• Доказывает что <math>\angle BIA = \frac{1}{2}\angle PDA = \angle CDI</math> ..... 2б</li> </ul>	3 балла
4.	Из 3. выводит $BC = 2\sqrt{AB \cdot CD}$	1 балл
Общее количество баллов		7 баллов

**11.8.** Все числа  $1, 2, \dots, 100$  вписаны произвольным образом в ячейки таблицы с размерами  $10 \times 10$  (по одному числу в каждую ячейку). Известно, что в каждой строке числа расположены в убывающем порядке (слева направо).

Докажите, что существует строка такая, что сумма всех чисел в этой строке меньше, чем сумма всех чисел в третьем столбце (слева).

Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Доказывает что сумма чисел 3-го столбца $x_1 > x_2 > \dots > x_{10}$ не меньше $8x_{10} + 180$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• Доказывает что <math>x_1 \geq 80</math> ..... 1б</li> <li>• Доказывает что <math>x_2 \geq 72</math> ..... 2б</li> </ul>	4 балла
2.	Доказывает что сумма чисел в строке содержащей $x_{10}$ не больше $8x_{10} + 171$	2 балла
3.	Из 1. и 2 выводит утверждение задачи	1 балл
Общее количество баллов		7 баллов

**Примечание.** За разбор частных случаев баллы не начисляются.