

A 69-A OLIMPIADĂ REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
28 februarie – 2 martie 2026, Clasa a XI-a
Enunțuri și soluții – Prima zi

11.1. Demonstrați că pentru orice $x > 0$ are loc inegalitatea: $e^x > 1 + x^2$.

Soluție. Pentru $x = 0$ partea stângă și cea dreaptă ale inegalității sunt egale. E suficient să arătăm că derivata expresiei din stânga este mai mare decât derivata expresiei din dreapta, adică $e^x > 2x$ pentru orice $x \geq 0$.

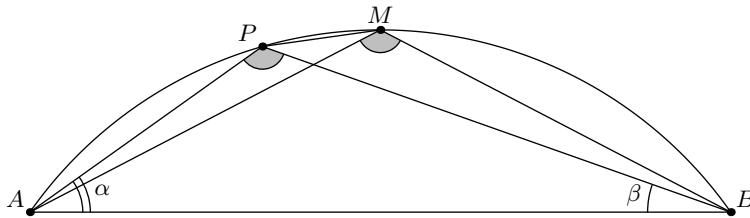
Considerăm funcția $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 2x$. Pentru a găsi minimumul funcției f vom căuta punctele critice: $f'(x) = 0 \iff e^x - 2 = 0 \iff x = \ln 2$. Deoarece $f''(x) = e^x > 0$, rezultă că f are un punct extrem, și anume un punct de minim în $x = \ln 2$. Ca urmare,

$$f(x) \geq f(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2 \ln 2 = 2 - 2 \ln 2 = 2(1 - \ln 2) = 2(\ln e - \ln 2) > 0 \quad (\forall x \geq 0).$$

Rezultă că $e^x > 1 + x^2$ pentru orice $x > 0$. □

11.2. Fie M mijlocul unui arc de cerc \widehat{AB} , iar P un punct arbitrar pe acest arc.

Demonstrați următoarea relație pentru lungimile segmentelor: $PA \cdot PB + PM^2 = AM^2$.



Soluție. Fie $\alpha = \angle PAB$ și $\beta = \angle PBA$. Din simetrie, putem presupune că $\alpha \geq \beta$. Deoarece M este mijlocul arcului \widehat{AB} , triunghiul MAB este isoscel și $\angle AMB = \angle APB = 180^\circ - \alpha - \beta$, deci $\angle MAB = \angle MBA = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. Fie R raza cercului circumscris $\triangle PAB$. Folosind succesiv teorema sinusului, avem:

$$PA = 2R \sin \beta, \quad PB = 2R \sin \alpha, \quad PM = 2R \sin \angle MAP = 2R \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad AM = 2R \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Relația de demonstrat devine $\sin \alpha \cdot \sin \beta + \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} = \sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2}$ (*). Avem

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} &= \left(\sin \frac{\alpha + \beta}{2} + \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cdot \left(\sin \frac{\alpha + \beta}{2} - \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ &= 2 \sin \frac{\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}}{2} \cos \frac{\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}}{2} \cdot 2 \sin \frac{\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}}{2} \cos \frac{\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}}{2} \\ &= 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cdot 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} = \sin \alpha \sin \beta, \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

□

11.3. a) Arătați că, dacă numărul zecimal $a = \overline{0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots}$ este un număr rațional, atunci există limita finită

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

b) Este adevărată afirmația reciprocă?

Soluție. a) Fie $a = \overline{0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots}$ un număr rațional. Atunci scrierea numărului a conține un bloc de cifre $\boxed{a_1 a_2 \dots a_k}$, care nu se repetă și care poate fi nul, după care apare un bloc din p cifre $\boxed{a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+p}}$, care se repetă periodic. Astfel, scrierea numărului a are forma

$$a = 0, \boxed{a_1 a_2 \dots a_k} \boxed{a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+p}} \boxed{a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+p}} \boxed{a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+p}} \dots,$$

Notăm $S_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$, $i \geq 1$, iar $d = a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{k+p}$.

Atunci pentru orice $n > k$ avem

$$S_n = S_k + a_{k+1} + \dots + a_n = S_k + md + r_n,$$

unde $m = \left[\frac{n-k}{p} \right]$ (numărul de blocuri de p cifre care se conțin în pozițiile de la $k+1$ până la n , aici $[\cdot]$ reprezintă partea întreagă a numărului), iar r_n este suma cifrelor din ultimul (posibil nul) bloc rămas incomplet. Astfel $0 \leq r_n < d$.

Folosim relațiile

$$m = \left[\frac{n-k}{p} \right] \iff m \leq \frac{n-k}{p} < m+1 \iff \frac{n-k}{p} - 1 < m \leq \frac{n-k}{p}.$$

Prin urmare,

$$S_k + \left(\frac{n-k}{p} - 1 \right) d < S_n = S_k + md + r_n \leq S_k + \frac{n-k}{p} d + d \implies$$

$$\frac{S_k}{n} + \frac{d}{p} - \frac{kd}{pn} - \frac{d}{n} < \frac{S_n}{n} \leq \frac{S_k}{n} + \frac{d}{p} - \frac{kd}{pn} + \frac{d}{n}.$$

Partea stângă și partea dreaptă au aceeași limită egală cu $\frac{d}{p}$, când $n \rightarrow +\infty$.

Prin urmare, există limita finită cerută $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

b) Afirmația reciprocă, în caz general, nu este adevărată. Considerăm numărul $a = \overline{0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots}$ cu

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n = 2^k \\ 0 & \text{dacă } n \neq 2^k \end{cases}$$

adică $a = 0, 1101000100000001 \dots$. Pe de altă parte, $S_{2^k} = k + 1$.

Pentru $2^{k-1} < n \leq 2^k$ avem

$$0 \leq \frac{S_n}{n} \leq \frac{S_{2^k}}{2^{k-1}} = \frac{k+1}{2^{k-1}},$$

de unde rezultă că există limita $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = 0$. Dar acest număr a este irațional, deoarece scrierea sa nu este periodică. \square

11.4. Determinați toate funcțiile continue $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea:

$$f(x) + f\left(\frac{x}{4}\right) - 2f\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{x}, \text{ pentru orice } x \geq 0.$$

Înlocuind $x \mapsto \frac{x}{2^k}$, pentru $k = 0, 1, \dots, n$ în relația din enunț, și sumând cele $n + 1$ relații, obținem după simplificări

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2^{n+2}}\right) - f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + \dots + \frac{1}{(\sqrt{2})^n}\right)$$

Din continuitatea funcției f în $x = 0$ rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0)$. Astfel, trecând relația de mai sus la limită (pentru $n \rightarrow \infty$), obținem

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) + f(0) - f(0) = \sqrt{x} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^k} = \frac{\sqrt{x}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}, \quad \forall x \geq 0. \quad (1)$$

Substituind acum $x \mapsto \frac{x}{2^k}$, pentru $k = 0, 1, \dots, n$ în relația (1) și sumând cele $n + 1$ relații, obținem

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \frac{\sqrt{x}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + \dots + \frac{1}{(\sqrt{2})^n}\right)$$

Ca mai sus, trecem ultima relație la limită (pentru $n \rightarrow \infty$) și obținem

$$f(x) - f(0) = \frac{\sqrt{x}}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}.$$

Prin urmare, funcția f satisface

$$f(x) = f(0) + \frac{\sqrt{x}}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}, \quad \text{pentru orice } x > 0.$$

Reciproc, se verifică imediat că pentru orice $c \in \mathbb{R}$, funcția $f(x) = c + \frac{\sqrt{x}}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$ satisface relația din enunț.