

# A 69-A OLIMPIADĂ REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ

28 februarie – 2 martie 2026, Clasa a XI-a

## Enunțuri și soluții – A doua zi

**11.5.** Determinați toate numerele reale  $x_0$ , astfel încât tangenta la graficul funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - x^2$ , dusă în punctul cu abscisa  $x_0$ , intersectează acest grafic în cel puțin încă un punct.

*Soluție.* Fie  $x_0$  un număr real arbitrar. Funcția dată  $f$  este derivabilă și ecuația tangentei la graficul funcției  $y = f(x)$  în punctul  $(x_0, f(x_0))$  este

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \iff y = x_0^3 - x_0^2 + (3x_0^2 - 2x_0)(x - x_0).$$

Punctele de intersecție a tangentei cu graficul funcției  $y = f(x) = x^3 - x^2$  se găsesc din ecuația

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 &= x_0^3 - x_0^2 + (3x_0^2 - 2x_0)(x - x_0) \iff \\ (x^3 - x_0^3) - (x^2 - x_0^2) - (3x_0^2 - 2x_0)(x - x_0) &= 0 \iff \\ (x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2 - x - x_0 - 3x_0^2 + 2x_0) &= 0 \iff \\ (x - x_0)(x^2 + x(x_0 - 1) - 2x_0^2 + x_0) &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Din prima paranteză obținem punctul de intersecție cu  $x = x_0$ , deja cunoscut.

Trinomul pătrat din a doua paranteză are discriminantul  $\Delta = (3x_0 - 1)^2 \geq 0$ . Prin urmare, pentru  $x_0 \neq \frac{1}{3}$  acest trinom, dar și ecuațiile (1) au cel puțin două soluții, care conduc la cel puțin două puncte de intersecție.

Pentru  $x_0 = \frac{1}{3}$  trinomul pătrat și ecuațiile (1) au o soluție unică  $x = x_0$ .

Astfel, doar pentru  $x_0 = \frac{1}{3}$  tangenta respectivă intersectează graficul funcției  $f$  într-un singur punct, și acesta are abscisa  $x = x_0$ .

Răspuns: Pentru orice punct  $x_0 \neq \frac{1}{3}$ , și doar pentru ele, tangenta respectivă intersectează graficul funcției  $f$  în cel puțin două puncte.  $\square$

**11.6.** a) Fie o funcție continuă  $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ . Arătați că dacă există limita  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = +\infty$ , atunci există și limita  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

b) Este adevărată aceeași afirmație pentru orice funcție continuă  $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ ?

*Soluție.* Se știe că pentru funcția  $g : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ :

1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ , dacă și numai dacă pentru orice  $M > 0$  există  $t > 0$ , astfel încât pentru orice  $x > t$  avem  $f(x) > M$ ;

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ , dacă și numai dacă pentru orice șir  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  cu  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$  avem  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = +\infty$ .

a) Presupunem că  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq +\infty$ , în particular, poate această limită nici nu există.

Atunci există  $M > 0$ , astfel încât pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  există  $x_n > n$  astfel încât  $0 \leq f(x_n) \leq M$ . Menționăm că pentru șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avem  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$  și, ca urmare,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(f(x_n)) = +\infty$ .

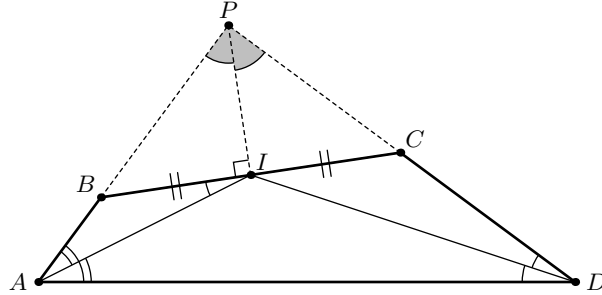
Pe de altă parte, funcția continuă  $f$  este mărginită pe segmentul  $[0, M]$ . Deci, șirul  $(f(f(x_n)))_{n \in \mathbb{N}}$  trebuie să fie mărginit, contradicție.

Prin urmare, există  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

b) În caz general, afirmația nu este adevărată pentru funcții continue  $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ .

Ca exemplu putem lua funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Atunci,  $f(f(x)) = x$  ( $\forall x > 0$ ),  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = +\infty$ , dar  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ .  $\square$

**11.7.** În patrulaterul convex  $ABCD$ , bisectoarele unghiurilor ascuțite  $\angle A$  și  $\angle D$  se intersectează în punctul de mijloc al laturii  $BC$ . Demonstrați că  $BC = 2\sqrt{AB \cdot CD}$ .



*Soluție.* Deoarece unghiurile  $\hat{A}$  și  $\hat{D}$  sunt ascuțite, semidreptele  $(AB$  și  $(DC$  se intersectează într-un punct  $P$ . Fie  $I$  mijlocul laturii  $[BC]$ . Din enunț rezultă că  $I$  este punctul de intersecție a bisectoarelor triunghiului  $APD$ . Prin urmare,  $PI$  este bisectoare și mediană în triunghiul  $BPC$ . Atunci  $\triangle BPC$  este isoscel și  $PI \perp BC$ . Atunci

$$\angle BIA = \angle AIP - 90^\circ = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle PAB - \frac{1}{2}\angle APD - 90^\circ = \frac{1}{2}\angle PDA = \angle CDI \quad (1)$$

În mod similar se arată că  $\angle CID = \angle BAI$  (2).

Din (1) și (2) rezultă asemănarea triunghiurilor  $ABI$  și  $ICD$ . Prin urmare,

$$\frac{AB}{BI} = \frac{IC}{CD} \implies AB \cdot CD = BI \cdot IC = \frac{1}{4}BC^2 \implies BC = 2\sqrt{AB \cdot CD}.$$

$\square$

**11.8.** Toate numerele  $1, 2, \dots, 100$  sunt scrise într-un mod arbitrar în celulele unui tabel de dimensiuni  $10 \times 10$  (câte un număr în fiecare celulă). Se știe că în fiecare rând numerele sunt plasate în ordine descrescătoare (de la stânga la dreapta).

Demonstrați că există un rând, astfel încât suma tuturor numerelor din acest rând este mai mică decât suma tuturor numerelor din coloana a treia (de la stânga).

*Soluție.* Fie  $x_1 > x_2 > \dots > x_{10}$  numerele din coloana 3 a tabelului. Deoarece cel mult 20 de numere din tabel pot fi mai mari decât  $x_1$  (numerele din primele două coloane), rezultă că  $x_1 \geq 80$ . Similar, cel mult 28 de numere pot fi mai mari decât  $x_2$  (cele din primele două coloane, sau cele din același rând cu  $x_1$ ), de unde obținem că  $x_2 \geq 72$ . Prin urmare, suma numerelor din coloana 3 este

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{10} \geq 80 + 72 + (x_{10} + 7) + (x_{10} + 6) + \dots + x_{10} = 8x_{10} + 180. \quad (1)$$

Pe de altă parte, suma numerelor din rândul lui  $x_{10}$  este cel mult

$$100 + 99 + x_{10} + (x_{10} - 1) + \dots + (x_{10} - 8) = 8x_{10} + 171,$$

care, conform (1), este mai mică decât suma numerelor din coloana 3.  $\square$