

A 69-A OLIMPIADĂ REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ

Prima zi, 28 februarie 2026, Clasa a XI-a

11.1. Demonstrați că pentru orice $x > 0$ are loc inegalitatea: $e^x > 1 + x^2$.

11.2. Fie M mijlocul unui arc de cerc \widehat{AB} , iar P un punct arbitrar pe acest arc.

Demonstrați următoarea relație pentru lungimile segmentelor: $PA \cdot PB + PM^2 = AM^2$.

11.3. a) Arătați că, dacă numărul zecimal $a = \overline{0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots}$ este un număr rațional, atunci există limita finită

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

b) Este adevărată afirmația reciprocă?

11.4. Determinați toate funcțiile continue $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea:

$$f(x) + f\left(\frac{x}{4}\right) - 2f\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{x}, \text{ pentru orice } x \geq 0.$$

Timp de lucru: 240 minute.

Rezolvarea corectă a oricărei probleme se apreciază cu 7 puncte. MULT SUCCES !

A 69-A OLIMPIADĂ REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ

Prima zi, 28 februarie 2026, Clasa a XI-a

11.1. Demonstrați că pentru orice $x > 0$ are loc inegalitatea: $e^x > 1 + x^2$.

11.2. Fie M mijlocul unui arc de cerc \widehat{AB} , iar P un punct arbitrar pe acest arc.

Demonstrați următoarea relație pentru lungimile segmentelor: $PA \cdot PB + PM^2 = AM^2$.

11.3. a) Arătați că, dacă numărul zecimal $a = \overline{0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots}$ este un număr rațional, atunci există limita finită

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

b) Este adevărată afirmația reciprocă?

11.4. Determinați toate funcțiile continue $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea:

$$f(x) + f\left(\frac{x}{4}\right) - 2f\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{x}, \text{ pentru orice } x \geq 0.$$

Timp de lucru: 240 minute.

Rezolvarea corectă a oricărei probleme se apreciază cu 7 puncte. MULT SUCCES !