69-Я РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Первый день, 28 февраля 2026 г., XI класс

11.1. Докажите, что для любого $x > 0$ имеет место неравенство: $e^x > 1 + x^2$.

11.2. Пусть M – середина некоторой дуги окружности $\overset{\frown}{AB}$, а P – произвольная точка на этой дуге. Докажите следующее соотношение для длин отрезков: $PA \cdot PB + PM^2 = AM^2$.

11.3. а) Покажите, что если десятичное число $a = \overline{0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots}$ является рациональным числом, то существет конечный предел

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

б) Верно ли обратное утверждение?

11.4. Найдите все непрерывные функции $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ со свойством:

$$f(x) + f\left(\frac{x}{4}\right) - 2f\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{x}, \text{ для всех } x \geq 0.$$

Время работы: 240 минут.

Правильное решение любой задачи оценивается в 7 баллов. ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!

69-Я РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Первый день, 28 февраля 2026 г., XI класс

11.1. Докажите, что для любого $x > 0$ имеет место неравенство: $e^x > 1 + x^2$.

11.2. Пусть M – середина некоторой дуги окружности $\overset{\frown}{AB}$, а P – произвольная точка на этой дуге. Докажите следующее соотношение для длин отрезков: $PA \cdot PB + PM^2 = AM^2$.

11.3. а) Покажите, что если десятичное число $a = \overline{0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots}$ является рациональным числом, то существет конечный предел

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

б) Верно ли обратное утверждение?

11.4. Найдите все непрерывные функции $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ со свойством:

$$f(x) + f\left(\frac{x}{4}\right) - 2f\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{x}, \text{ для всех } x \geq 0.$$

Время работы: 240 минут.

Правильное решение любой задачи оценивается в 7 баллов. ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!