

A 69-A OLIMPIADĂ REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ

A doua zi, 1 martie 2026, Clasa a XI-a

11.5. Determinați toate numerele reale x_0 , astfel încât tangenta la graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2$, dusă în punctul cu abscisa x_0 , intersectează acest grafic în cel puțin încă un punct.

11.6. a) Fie o funcție continuă $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$. Arătați că dacă există limita $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = +\infty$, atunci există și limita $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b) Este adevărată aceeași afirmație pentru orice funcție continuă $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$?

11.7. În patrulaterul convex $ABCD$, bisectoarele unghiurilor ascuțite $\angle A$ și $\angle D$ se intersectează în punctul de mijloc al laturii BC . Demonstrați că $BC = 2\sqrt{AB \cdot CD}$.

11.8. Toate numerele $1, 2, \dots, 100$ sunt scrise într-un mod arbitrar în celulele unui tabel de dimensiuni 10×10 (câte un număr în fiecare celulă). Se știe că în fiecare rând numerele sunt plasate în ordine descrescătoare (de la stânga la dreapta).

Demonstrați că există un rând, astfel încât suma tuturor numerelor din acest rând este mai mică decât suma tuturor numerelor din coloana a treia (de la stânga).

Timp de lucru: 240 minute.

Rezolvarea corectă a oricărei probleme se apreciază cu 7 puncte. MULT SUCCES !

A 69-A OLIMPIADĂ REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ

A doua zi, 1 martie 2026, Clasa a XI-a

11.5. Determinați toate numerele reale x_0 , astfel încât tangenta la graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2$, dusă în punctul cu abscisa x_0 , intersectează acest grafic în cel puțin încă un punct.

11.6. a) Fie o funcție continuă $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$. Arătați că dacă există limita $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = +\infty$, atunci există și limita $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b) Este adevărată aceeași afirmație pentru orice funcție continuă $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$?

11.7. În patrulaterul convex $ABCD$, bisectoarele unghiurilor ascuțite $\angle A$ și $\angle D$ se intersectează în punctul de mijloc al laturii BC . Demonstrați că $BC = 2\sqrt{AB \cdot CD}$.

11.8. Toate numerele $1, 2, \dots, 100$ sunt scrise într-un mod arbitrar în celulele unui tabel de dimensiuni 10×10 (câte un număr în fiecare celulă). Se știe că în fiecare rând numerele sunt plasate în ordine descrescătoare (de la stânga la dreapta).

Demonstrați că există un rând, astfel încât suma tuturor numerelor din acest rând este mai mică decât suma tuturor numerelor din coloana a treia (de la stânga).

Timp de lucru: 240 minute.

Rezolvarea corectă a oricărei probleme se apreciază cu 7 puncte. MULT SUCCES !