

69-Я РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Второй день, 1 марта 2026 г., XI класс

11.5. Найдите все действительные числа x_0 такие, что касательная к графику функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2$, проведённая в точке с абсциссой x_0 , пересекает этот график, по крайней мере, ещё в одной точке.

11.6. а) Дана некоторая непрерывная функция $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$. Покажите, что если существует предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = +\infty$, то тогда существует и предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

б) Верно ли такое же утверждение для любой непрерывной функции $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$?

11.7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$, биссектрисы острых углов $\angle A$ и $\angle D$ пересекаются в серединной точке стороны BC . Докажите, что $BC = 2\sqrt{AB \cdot CD}$.

11.8. Все числа $1, 2, \dots, 100$ вписаны произвольным образом в ячейки таблицы с размерами 10×10 (по одному числу в каждую ячейку). Известно, что в каждой строке числа расположены в убывающем порядке (слева направо).

Докажите, что существует строка такая, что сумма всех чисел в этой строке меньше, чем сумма всех чисел в третьем столбце (слева).

Время работы: 240 минут.

Правильное решение любой задачи оценивается в 7 баллов. ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!

69-Я РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Второй день, 1 марта 2026 г., XI класс

11.5. Найдите все действительные числа x_0 такие, что касательная к графику функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2$, проведённая в точке с абсциссой x_0 , пересекает этот график, по крайней мере, ещё в одной точке.

11.6. а) Дана некоторая непрерывная функция $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$. Покажите, что если существует предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = +\infty$, то тогда существует и предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

б) Верно ли такое же утверждение для любой непрерывной функции $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$?

11.7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$, биссектрисы острых углов $\angle A$ и $\angle D$ пересекаются в серединной точке стороны BC . Докажите, что $BC = 2\sqrt{AB \cdot CD}$.

11.8. Все числа $1, 2, \dots, 100$ вписаны произвольным образом в ячейки таблицы с размерами 10×10 (по одному числу в каждую ячейку). Известно, что в каждой строке числа расположены в убывающем порядке (слева направо).

Докажите, что существует строка такая, что сумма всех чисел в этой строке меньше, чем сумма всех чисел в третьем столбце (слева).

Время работы: 240 минут.

Правильное решение любой задачи оценивается в 7 баллов. ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!