A 69-A OLIMPIADĂ REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
Prima zi, 28 februarie 2026, Clasa a X–a

BAREM DE EVALUARE

Remarcă. ***Rezolvarea corectă a oricărei probleme se apreciază cu 7 puncte.***

10.1. Fie funcția $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ pentru care:

a) $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\le f(x)+f(y)$, pentru orice $x,y\in[0,1]$;

b) $f(0)=f(1)=0$.

Arătați că funcția f are o infinitate de zerouri.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Se obține $f(x)\ge 0, \forall x\in[0,1]$.	1 punct
2.	Se obține $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\le f(0)+f(1)$.	1 punct
3.	Se obține $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$.	1 punct
4.	Se obține $f\left(\dfrac{1}{2^2}\right)=0$.	1 punct
5.	Se obține $f\left(\dfrac{1}{2^n}\right)=0, \forall n\in\mathbf{N}$.	2 puncte
6.	Se obține că funcția f are o infinitate de zerouri pe $[0,1]$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

10.2. Arătați că dacă $b=2^{\log_{\frac{2}{a}}2}$ și $c=2^{\log_{\frac{2}{b}}2}$, atunci $a=2^{\log_{\frac{2}{c}}2}$.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Se obține $\log_2 b=\log_{\frac{2}{a}}2$.	1 punct
2.	Se obține $\log_2 b=\dfrac{1}{1-\log_2 a}$.	1 punct
3.	Se obține, în mod analog, $\log_2 c=\dfrac{1}{1-\log_2 b}$.	1 punct
4.	Se obține $\log_2 c=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\log_2 a}}$.	1 punct
5.	Se obține $\log_2 c=1-\dfrac{1}{\log_2 a}$.	1 punct
6.	Se obține $\log_2 a=\dfrac{1}{1-\log_2 c}$.	1 punct
7.	Se obține $a=2^{\log_{\frac{2}{c}}2}$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

10.3. În pătratul *ABCD* pe latura *AB* se ia un punct *F*, iar pe diagonala *BD* se ia un punct *E*, astfel încât $AF:FB=2:1$ și $m(\angle AFE)=60^\circ$. Determinați $m(\angle DAE)$.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Se construiește $AI \perp EF$, $I \in EF$.	1 punct
2.	Se obține $FI = FB$.	1 punct
3.	Se obține $m(\angle FBI)=30^\circ$.	1 punct
4.	Se obține $AI = BI$.	1 punct
5.	Se obține $m(\angle IEB)=15^\circ$.	1 punct
6.	Se obține $BI = EI$.	1 punct
7.	Se obține $m(\angle DAE)=15^\circ$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

10.4. Determinați partea întreagă a numărului $S=\sqrt{18}+\sqrt{19}+\sqrt{20}+...+\sqrt{32}$.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Se obține $S=\sqrt{50+2\sqrt{576}}+\sqrt{50+2\sqrt{589}}+\sqrt{50+2\sqrt{600}}+\sqrt{50+2\sqrt{609}}+$ $+\sqrt{50+2\sqrt{616}}+\sqrt{50+2\sqrt{621}}+\sqrt{50+2\sqrt{624}}+5$.	2 puncte
2.	Se obține că fiecare termen „radical” al lui S este mai mic decât 10.	1 punct
3.	Se obține $S<75$.	1 punct
4.	Se determină că cel mai mic termen „radical” al lui S este $\sqrt{98}$.	1 punct
5.	Se obține $\sqrt{98}>\frac{69}{7}$.	1 punct
6.	Se obține $S>74$ și $[S]=74$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte