A 69-A OLIMPIADĂ REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
A doua zi, 1 martie 2026, Clasa a X–a

BAREM DE EVALUARE

Remarcă. ***Rezolvarea corectă a oricărei probleme se apreciază cu 7 puncte.***

10.5. Arătați că pentru orice numere reale $x, y \in (-2, 2)$, are loc inegalitatea $\left|\frac{x-y}{xy-4}\right| < \frac{1}{2}$.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Se obține $4 - xy > 0$.	1 punct
2.	Se obține $x(2+y) < 2(2+y)$.	1 punct
3.	Se obține $2(x-y) < 4 - xy$.	1 punct
4.	Se obține, în mod analog, $2(y-x) < 4 - xy$.	1 punct
5.	Se obține $\lvert 2(x-y) \rvert < 4 - xy$.	1 punct
6.	Se obține $\frac{2\lvert x-y \rvert}{4-xy} < 1$.	1 punct
7.	Se obține $\left\lvert\frac{x-y}{xy-4}\right\rvert < \frac{1}{2}$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

10.6. Rezolvați în numere naturale ecuația $(x-y)^3 - xy = 113 - 3xy(x-y)$.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Se aduce ecuația din enunț la forma $x^3 - y^3 = xy + 113$.	1 punct
2.	Se obține $x > y$.	1 punct
3.	Se obține $x = y + a,\ a \in \mathbf{N}^*$.	1 punct
4.	Se obține ecuația echivalentă $(3a-1)y^2 + (3a^2 - a)y + a^3 = 113$.	1 punct
5.	Se obține $a \in \{1, 2, 3, 4\}$.	1 punct
6.	Se cercetează cazurile $a = 1$, $a = 2$ și se obține $x = 8$, $y = 7$.	1 punct
7.	Se cercetează cazurile $a = 3$, $a = 4$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

10.7. În triunghiul ABC obtuzunghic în B, mediana AM, $M \in (BC)$, formează unghi de 45° cu latura BC și unghi de 15° cu latura AC. Determinați $m(\angle BAM)$.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Se obține $m(\angle MCA) = 30^\circ$.	1 punct
2.	Se ia pe latura AC un punct N, astfel încât $MN = MC$.	1 punct
3.	Se obține $m(\angle AMN) = 15^\circ$.	1 punct
4.	Se obține $AN = MN$.	1 punct
5.	Se obține că $\triangle BMN$ este echilateral.	1 punct
6.	Se obține că $\triangle ANB$ este dreptunghic isoscel.	1 punct
7.	Se obține $m(\angle BAM) = 30^\circ$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

10.8. Determinați toate tripletele de numere reale (x, y, z), care pentru orice număr real $t \neq 0$ satisfac relația $\left(xt^2 + yt + z\right)\left(\frac{x}{t^2} + \frac{y}{t} + z\right) = 7\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) - 8\left(t + \frac{1}{t}\right) + 51.$		
Rezolvare cu barem de evaluare		
Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Se obține relația $xzu^2 + (xy + yz)u + \left(x^2 + y^2 + z^2 - 2xz\right) = 7u^2 - 8u + 37$ **(*)** echivalentă cu cea din enunț, unde $u = t + \frac{1}{t}$, $\lvert u \rvert \geq 2$.	1 punct
2.	Se menționează că relația **(*)** reprezintă egalitatea a două polinoame de gradul 2 în u, valorile cărora coincid pentru o infinitate de valori ale $u \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.	1 punct
3.	Se obține sistemul $\begin{cases} xz = 7 \\ xy + yz = -8 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 37 \end{cases}$.	1 punct
4.	Se obține sistemul $\begin{cases} xz = 7 \\ x - y + z = \pm 9 \\ x + y + z = \pm 7 \end{cases}$, ceea ce reprezintă totalitatea a patru sisteme.	2 puncte
5.	Se rezolvă sistemele $\begin{cases} xz = 7 \\ x - y + z = 9 \\ x + y + z = 7 \end{cases}$, $\begin{cases} xz = 7 \\ x - y + z = -9 \\ x + y + z = 7 \end{cases}$ și se obține $(x, y, z) \in \{(1, -1, 7), (7, -1, 1)\}$.	1 punct
6.	Se rezolvă sistemele $\begin{cases} xz = 7 \\ x - y + z = 9 \\ x + y + z = -7 \end{cases}$, $\begin{cases} xz = 7 \\ x - y + z = -9 \\ x + y + z = -7 \end{cases}$ și se obține $(x, y, z) \in \{(-1, 1, -7), (-7, 1, -1)\}$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: *Neasigurarea echivalenței în rezolvare, se pedepsește cu un punct.*