69-Я РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
Второй день, 1 марта 2026 г., X класс

СХЕМА ПРОВЕРКИ ТЕСТА

Примечание. ***Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.***

10.5. Покажите, что для любых действительных чисел $x, y \in (-2, 2)$, справедливо неравенство $\left|\frac{x-y}{xy-4}\right| < \frac{1}{2}$.

Решение со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Получение $4 - xy > 0$.	1 балл
2.	Получение $x(2+y) < 2(2+y)$.	1 балл
3.	Получение $2(x-y) < 4 - xy$.	1 балл
4.	Получение, аналогичным образом, $2(y-x) < 4 - xy$.	1 балл
5.	Получение $\left|2(x-y)\right| < 4 - xy$.	1 балл
6.	Получение $\frac{2\left|x-y\right|}{4-xy} < 1$.	1 балл
7.	Получение $\left|\frac{x-y}{xy-4}\right| < \frac{1}{2}$.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

10.6. Решите в натуральных числах уравнение $(x-y)^3 - xy = 113 - 3xy(x-y)$.

Решение со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Приведение уравнения из условия к виду $x^3 - y^3 = xy + 113$.	1 балл
2.	Получение $x > y$.	1 балл
3.	Получение $x = y + a,\ a \in \mathbf{N}^*$.	1 балл
4.	Получение эквивалентного уравнения $(3a-1)y^2 + (3a^2 - a)y + a^3 = 113$.	1 балл
5.	Получение $a \in \{1, 2, 3, 4\}$.	1 балл
6.	Исследование случаев $a = 1$, $a = 2$ и получение $x = 8$, $y = 7$.	1 балл
7.	Исследование случаев $a = 3$, $a = 4$.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

10.7. В треугольнике ABC с тупым углом B, медиана AM, $M \in (BC)$, образует со стороной BC угол, равный 45° и со стороной AC угол, равный 15°. Найдите $m(\angle BAM)$.		
Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Получение $m(\angle MCA) = 30^\circ$.	1 балл
2.	Берется на стороне AC точка N такая, что $MN = MC$.	1 балл
3.	Получение $m(\angle AMN) = 15^\circ$.	1 балл
4.	Получение $AN = MN$.	1 балл
5.	Получение, что $\triangle BMN$ является равносторонним.	1 балл
6.	Получение, что $\triangle ANB$ является прямоугольным равнобедренным.	1 балл
7.	Получение $m(\angle BAM) = 30^\circ$.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

10.8. Найдите все тройки (x, y, z) действительных чисел, которые для любого действительного числа $t \neq 0$, удовлетворяют отношению $\left(xt^2 + yt + z\right)\left(\frac{x}{t^2} + \frac{y}{t} + z\right) = 7\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) - 8\left(t + \frac{1}{t}\right) + 51.$		
Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Получение соотношения $xzu^2 + (xy + yz)u + \left(x^2 + y^2 + z^2 - 2xz\right) = 7u^2 - 8u + 37$ **(*)** эквивалентное той, что в условии, где $u = t + \frac{1}{t}$, $\lvert u \rvert \geq 2$.	1 балл
2.	Отмечание, что соотношение **(*)** представляет собой равенство двух многочленов степени 2 по u, значения которых совпадают для бесконечности значений $u \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.	1 балл
3.	Получение системы $\begin{cases} xz = 7 \\ xy + yz = -8 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 37 \end{cases}$.	1 балл
4.	Получение $\begin{cases} xz = 7 \\ x - y + z = \pm 9 \\ x + y + z = \pm 7 \end{cases}$, что представляет собой совокупность четырех систем.	2 балла
5.	Решение систем $\begin{cases} xz = 7 \\ x - y + z = 9 \\ x + y + z = 7 \end{cases}$, $\begin{cases} xz = 7 \\ x - y + z = -9 \\ x + y + z = 7 \end{cases}$ и получение $(x, y, z) \in \{(1, -1, 7), (7, -1, 1)\}$.	1 балл
6.	Решение систем $\begin{cases} xz = 7 \\ x - y + z = 9 \\ x + y + z = -7 \end{cases}$, $\begin{cases} xz = 7 \\ x - y + z = -9 \\ x + y + z = -7 \end{cases}$ и получение $(x, y, z) \in \{(-1, 1, -7), (-7, 1, -1)\}$.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Необеспечение эквивалентности в решении наказывается одним баллом.*