A 69-A OLIMPIADĂ REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
Prima zi, 28 februarie 2026, Clasa a X–a
Soluții

10.1. Fie funcția $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ pentru care:

a) $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\le f(x)+f(y)$, pentru orice $x,y\in[0,1]$;

b) $f(0)=f(1)=0$.

Arătați că funcția f are o infinitate de zerouri.

Soluție. Pentru orice $x,y\in[0,1]$ și $x=y$, avem $f(x)\le 2f(x)\Leftrightarrow f(x)\ge 0,\forall x\in[0,1]$.

Vom avea, $0\le f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{0+1}{2}\right)\le f(0)+f(1)=0$, de unde $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$.

În mod dual, $0\le f\left(\dfrac{1}{2^2}\right)=f\left(\dfrac{0+\frac{1}{2}}{2}\right)\le f(0)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$, de unde $f\left(\dfrac{1}{2^2}\right)=0$,

....,

$0\le f\left(\dfrac{1}{2^n}\right)=f\left(\dfrac{0+\frac{1}{2^{n-1}}}{2}\right)\le f(0)+f\left(\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)=0$, de unde $f\left(\dfrac{1}{2^n}\right)=0$, ...

Deci $f\left(\dfrac{1}{2^n}\right)=0,\forall n\in\mathbf{N}$, prin urmare funcția f are o infinitate de zerouri pe $[0,1]$.

10.2. Arătați că dacă $b=2^{\log_{\frac{2}{a}}2}$ și $c=2^{\log_{\frac{2}{b}}2}$, atunci $a=2^{\log_{\frac{2}{c}}2}$.

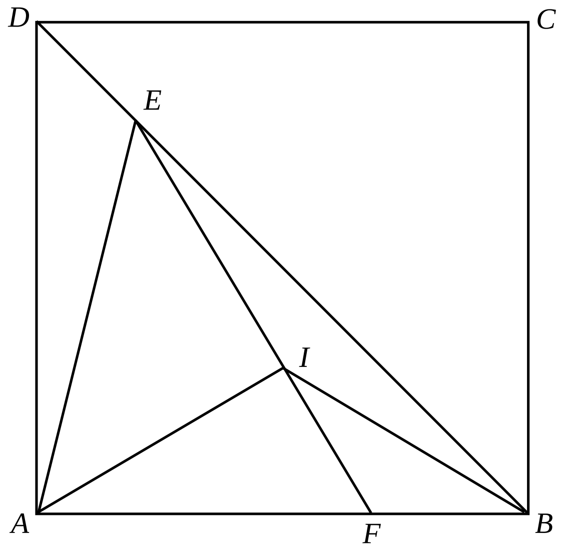
Soluție. Dacă $b=2^{\log_{\frac{2}{a}}2}$, atunci $\log_2 b=\log_{\frac{2}{a}}2=\dfrac{1}{\log_2\frac{2}{a}}=\dfrac{1}{\log_2 2-\log_2 a}=\dfrac{1}{1-\log_2 a}$.

În mod dual, din $c=2^{\log_{\frac{2}{b}}2}$, avem $\log_2 c=\dfrac{1}{1-\log_2 b}$. Deci

$$\log_2 c=\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-\log_2 a}}=\frac{1-\log_2 a}{1-\log_2 a-1}=\frac{1-\log_2 a}{-\log_2 a}=1-\frac{1}{\log_2 a}.$$

De unde, $\dfrac{1}{\log_2 a}=1-\log_2 c$, și deci $\log_2 a=\dfrac{1}{1-\log_2 c}=\dfrac{1}{\log_2\frac{2}{c}}=\log_{\frac{2}{c}}2$. Prin urmare, $a=2^{\log_{\frac{2}{c}}2}$.

10.3. În pătratul *ABCD* pe latura *AB* se ia un punct *F*, iar pe diagonala *BD* se ia un punct *E*, astfel încât $AF : FB = 2:1$ și $m(\angle AFE) = 60^\circ$. Determinați $m(\angle DAE)$.



Soluție. Deoarece $AF : FB = 2:1$, urmează $FB = a$ și $AF = 2a$. Ducem $AI \perp EF$, $I \in EF$. Atunci $\triangle AIF$ este dreptunghic cu $m(\angle AFI) = 60^\circ$ și $m(\angle IAF) = 30^\circ$, de unde $FI = a$.

Fiindcă $FI = FB$, avem că $\triangle IFB$ este isoscel cu $m(\angle FBI) = m(\angle FIB) = 30^\circ$.

Avem $m(\angle IAF) = 30^\circ = m(\angle IBA)$, urmează că $\triangle AIB$ este isoscel, deci $AI = BI$.

Din $\triangle FEB$, avem $m(\angle IEB) = 180^\circ - 45^\circ - 120^\circ = 15^\circ$, însă și $m(\angle IBE) = m(\angle FBE) - m(\angle FBI) = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$, deci $\triangle BIE$ este isoscel, de unde avem $BI = EI$.

Prin urmare, $AI = EI$, ceea ce înseamnă că $\triangle AIE$ este isoscel, dar $\triangle AIE$ este dreptunghic, de unde $m(\angle EAI) = 45^\circ$. Deci $m(\angle DAE) = m(\angle DAB) - m(\angle EAI) - m(\angle IAF) = 15^\circ$.

Răspuns: $m(\angle DAE) = 15^\circ$.

10.4. Determinați partea întreagă a numărului $S = \sqrt{18} + \sqrt{19} + \sqrt{20} + ... + \sqrt{32}$.

Soluție. Avem

$$S = \left(\sqrt{18} + \sqrt{32}\right) + \left(\sqrt{19} + \sqrt{31}\right) + \left(\sqrt{20} + \sqrt{30}\right) + \left(\sqrt{21} + \sqrt{29}\right) + \left(\sqrt{22} + \sqrt{28}\right) + \left(\sqrt{23} + \sqrt{27}\right) +$$

$$+\left(\sqrt{24} + \sqrt{26}\right) + \sqrt{25} = \sqrt{\left(\sqrt{18} + \sqrt{32}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{19} + \sqrt{31}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{20} + \sqrt{30}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{21} + \sqrt{29}\right)^2} +$$

$$+\sqrt{\left(\sqrt{22} + \sqrt{28}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{23} + \sqrt{27}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{24} + \sqrt{26}\right)^2} + 5 = \sqrt{50 + 2\sqrt{576}} + \sqrt{50 + 2\sqrt{589}} +$$

$$+\sqrt{50 + 2\sqrt{600}} + \sqrt{50 + 2\sqrt{609}} + \sqrt{50 + 2\sqrt{616}} + \sqrt{50 + 2\sqrt{621}} + \sqrt{50 + 2\sqrt{624}} + 5.$$

Deoarece fiecare termen „radical” al lui S (din cei șapte radicali) este mai mic decât $\sqrt{50 + 2\sqrt{625}} = \sqrt{100} = 10$, obținem $S < 7 \cdot 10 + 5 = 75$.

Cel mai mic termen „radical” dintre cei șapte ai lui S este $\sqrt{50 + 2\sqrt{576}} = \sqrt{98}$ și $\sqrt{98} > \frac{69}{7}$, deoarece $\sqrt{98} > \frac{69}{7} \Leftrightarrow 7\sqrt{98} > 69 \Leftrightarrow 7^2 \cdot 98 > 69^2 \Leftrightarrow 4802 > 4761$, ceea ce este adevărat. Prin urmare, $S > 7 \cdot \frac{69}{7} + 5 = 74$.

Deci, $74 < S < 75$, ceea ce implică $[S] = 74$.

Răspuns: 74.