

**A 69-A OLIMPIADĂ REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ**

**A doua zi, 1 martie 2026, Clasa a X-a**

**Soluții**

**10.5.** Arătați că pentru orice numere reale  $x, y \in (-2, 2)$ , are loc inegalitatea  $\left| \frac{x-y}{xy-4} \right| < \frac{1}{2}$ .

**Soluție.** Deoarece  $x, y \in (-2, 2)$ , urmează  $4 - xy > 0$ .

Fiindcă  $x < 2$  și  $2 + y > 0$ , obținem  $x(2 + y) < 2(2 + y)$ , adică  $2(x - y) < 4 - xy$  **(1)**.

Fiindcă  $y < 2$  și  $2 + x > 0$ , obținem  $y(2 + x) < 2(2 + x)$ , adică  $2(y - x) < 4 - xy$  **(2)**.

Din **(1)**, **(2)** și  $4 - xy > 0$ , avem

$$|2(x - y)| < 4 - xy \Leftrightarrow 2|x - y| < 4 - xy \Leftrightarrow \frac{2|x - y|}{4 - xy} < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{x - y}{4 - xy} \right| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left| \frac{x - y}{xy - 4} \right| < \frac{1}{2}.$$

**10.6.** Rezolvați în numere naturale ecuația  $(x - y)^3 - xy = 113 - 3xy(x - y)$ .

**Soluție.** Ecuația din enunț poate fi adusă la forma

$$x^3 - y^3 = xy + 113.$$

Deoarece  $x, y \in \mathbf{N}$ , atunci  $xy + 113 > 0$ , și deci  $x > y$ . Prin urmare,  $x = y + a$ ,  $a \in \mathbf{N}^*$ . Înlocuind în ecuație, obținem

$$\begin{aligned} (y + a)^3 - y^3 &= (y + a)y + 113 \Leftrightarrow y^3 + 3y^2a + 3ya^2 + a^3 - y^3 = y^2 + ay + 113 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (3a - 1)y^2 + (3a^2 - a)y + a^3 = 113. \end{aligned}$$

Toți trei termeni din partea stângă sunt numere pozitive, deoarece  $a \geq 1$  și  $y \geq 0$ . Prin urmare, fiecare termen nu depășește 113, deci și  $a^3 \leq 113$ , însă  $a \in \mathbf{N}^*$ , de unde  $a \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

Pentru  $a = 1$ , avem ecuația  $2y^2 + 2y - 112 = 0 \Leftrightarrow y^2 + y - 56 = 0 \Leftrightarrow y \in \{-8, 7\}$ , dar  $y \in \mathbf{N}$ , deci  $y = 7$  și respectiv  $x = 8$ .

Pentru  $a = 2$ , avem ecuația  $5y^2 + 10y - 105 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 2y - 21 = 0 \Leftrightarrow y \notin \mathbf{N}$ , deoarece  $\Delta = 88$ .

Pentru  $a = 3$ , avem ecuația  $8y^2 + 24y - 86 = 0 \Leftrightarrow 4y^2 + 12y - 43 = 0 \Leftrightarrow y \notin \mathbf{N}$ , deoarece  $\Delta = 832$ .

Pentru  $a = 4$ , avem ecuația  $11y^2 + 44y - 49 = 0 \Leftrightarrow y \notin \mathbf{N}$ , deoarece  $\Delta = 4092$ .

Deci, unica soluție în numere naturale  $x = 8$ ,  $y = 7$ .

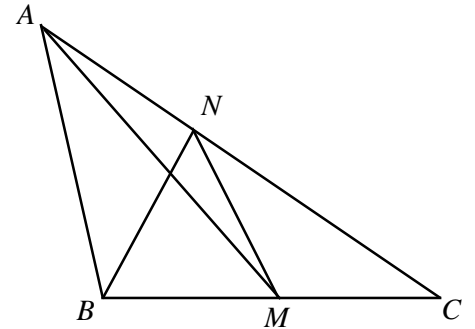
**Răspuns:**  $x = 8$ ,  $y = 7$ .

**10.7.** În triunghiul  $ABC$  obtuzunghic în  $B$ , mediana  $AM$ ,  $M \in (BC)$ , formează unghi de  $45^\circ$  cu latura  $BC$  și unghi de  $15^\circ$  cu latura  $AC$ . Determinați  $m(\angle BAM)$ .

**Soluție.** În  $\triangle AMC$  avem  $m(\angle MAC) = 15^\circ$  și

$$m(\angle BMA) = 45^\circ - \text{unghi exterior } \triangle AMC, \text{ deci } m(\angle MCA) = 30^\circ.$$

Pe latura  $AC$  luăm un punct  $N$ , astfel încât  $MN = MC$  (este posibil, deoarece  $AC > BC$ ). Atunci  $\triangle CMN$  este isoscel cu  $m(\angle MNC) = m(\angle MCN) = 30^\circ$ , de unde  $m(\angle CMN) = 120^\circ$  și  $m(\angle AMN) = 180^\circ - 45^\circ - 120^\circ = 15^\circ$ .



Fiindcă  $m(\angle MAN) = 15^\circ = m(\angle AMN)$ , avem  $\triangle AMN$  isoscel, de unde  $AN = MN$ .

În  $\triangle BMN$ , avem  $BM = MN$ , adică  $\triangle BMN$  este isoscel, și fiindcă  $m(\angle BMN) = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$ , urmează că  $\triangle BMN$  este echilateral, de unde  $BN = BM = MN$ .

Deci  $AN = BN$ , ceea ce înseamnă că  $\triangle ANB$  este isoscel, dar  $m(\angle BNC) = m(\angle BNM) + m(\angle MNC) = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ , urmează că  $\triangle ANB$  este dreptunghic isoscel, de unde  $m(\angle ABN) = m(\angle BAN) = 45^\circ$ . Prin urmare,  $m(\angle BAM) = m(\angle BAC) - m(\angle MAC) = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$ .

**Răspuns:**  $m(\angle BAM) = 30^\circ$ .

**10.8.** Determinați toate tripletele de numere reale  $(x, y, z)$ , care pentru orice număr real  $t \neq 0$  satisfac relația  $(xt^2 + yt + z)\left(\frac{x}{t^2} + \frac{y}{t} + z\right) = 7\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) - 8\left(t + \frac{1}{t}\right) + 51$ .

**Soluție.** Relația din enunț poate fi scrisă în forma

$$xz\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) + (xy + yz)\left(t + \frac{1}{t}\right) + (x^2 + y^2 + z^2) = 7\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) - 8\left(t + \frac{1}{t}\right) + 51.$$

Făcând notația  $t + \frac{1}{t} = u$ ,  $|u| \geq 2$ ,  $t^2 + \frac{1}{t^2} = u^2 - 2$ , obținem relația

$$xzu^2 + (xy + yz)u + (x^2 + y^2 + z^2 - 2xz) = 7u^2 - 8u + 37 \quad (*).$$

Relația (\*) reprezintă egalitatea a două polinoame de gradul 2 în  $u$ , valorile cărora coincid pentru o infinitate de valori ale  $u \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ . Aceasta este adevărat, dacă și numai dacă polinoamele sunt identice, adică

$$\begin{cases} xz = 7 \\ xy + yz = -8 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -xy - yz + zx = 15 \\ xy + yz + zx = -1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xz = 7 \\ (x - y + z)^2 = 81 \\ (x + y + z)^2 = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xz = 7 \\ x - y + z = \pm 9 \\ x + y + z = \pm 7 \end{cases}$$

Ultimul sistem este echivalent cu totalitatea următoarelor patru sisteme:

$$1) \begin{cases} xz = 7 \\ x - y + z = 9 \\ x + y + z = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xz = 7 \\ x + z = 8 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) \in \{(1, -1, 7), (7, -1, 1)\};$$

$$2) \begin{cases} xz = 7 \\ x - y + z = -9 \\ x + y + z = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xz = 7 \\ x + z = -1 \\ y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) \in \emptyset;$$

$$3) \begin{cases} xz = 7 \\ x - y + z = 9 \\ x + y + z = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xz = 7 \\ x + z = 1 \\ y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) \in \emptyset;$$

$$4) \begin{cases} xz = 7 \\ x - y + z = -9 \\ x + y + z = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xz = 7 \\ x + z = -8 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) \in \{(-1, 1, -7), (-7, 1, -1)\}.$$

Deci  $(x, y, z) \in \{(1, -1, 7), (7, -1, 1), (-1, 1, -7), (-7, 1, -1)\}$ .

Această rezolvare asigură echivalența transformărilor făcute, astfel nu este necesar de făcut verificarea.

**Răspuns:**  $(x, y, z) \in \{(1, -1, 7), (7, -1, 1), (-1, 1, -7), (-7, 1, -1)\}$ .