

## A 69-a Olimpiada Republicană de Matematică

Prima zi, 28 februarie 2026, clasa a VII-a

7.1. Simplificați fracția și raționalizați numitorul expresiei

$$\frac{\sqrt{5 + \sqrt{24}}}{\sqrt{10 + \sqrt{14} + \sqrt{15} + \sqrt{21}}}.$$

**Soluție.** Rețineți că

$$5 + \sqrt{24} = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = (\sqrt{3})^2 + 2(\sqrt{3})(\sqrt{2}) + (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2,$$

$$\sqrt{10} + \sqrt{14} + \sqrt{15} + \sqrt{21} = \sqrt{2}(\sqrt{5} + \sqrt{7}) + \sqrt{3}(\sqrt{5} + \sqrt{7}) = (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{5}).$$

Fracția noastră poate fi scrisă ca

$$\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{5})} = \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2}.$$

7.2. Fie  $n$  un număr natural. Desenăm  $n$  cercuri de raze  $1, 2, \dots, n$

cu centrul comun. Desenul reprezintă un cerc mic și câteva inele.

Vopsim figura, începând cu inelul exterior, pe care îl colorăm în negru, următorul inel îl colorăm în alb, următorul în culoare neagră și așa mai departe, până la cercul mic, alternând cele două culori.



(a) Procedura a fost efectuată pentru  $n = 5$ . Se obține desenul alăturat. Găsiți aria totală a suprafeței vopsite în negru.

(b) Aceeași procedură a fost efectuată pentru  $n = 999$ . Găsiți aria totală a suprafeței vopsite în negru.

**Soluție.** (a) Aria unui cerc este  $\pi R^2$ , unde  $R$  este raza cercului. Aria inelului negru exterior este egală cu diferența dintre aria unui cerc cu raza 5 minus aria unui cerc cu raza 4:  $\pi \cdot 5^2 - \pi \cdot 4^2 = 9\pi$ . Aria inelului negru interior este egală cu diferența dintre aria unui cerc cu raza 3 minus aria unui cerc cu raza 2:  $\pi \cdot 3^2 - \pi \cdot 2^2 = 5\pi$ . Aria cercului mic interior este  $\pi \cdot 1^2 = \pi$ . Aria totală, care a fost hașurată cu negru, este  $9\pi + 5\pi + \pi = 15\pi$ .

(b) Similar cu (a), suprafața totală umbrită cu negru este

$$\begin{aligned} A &= \pi \cdot 999^2 - \pi \cdot 998^2 + \pi \cdot 997^2 - \pi \cdot 996^2 + \dots + \pi \cdot 3^2 - \pi \cdot 2^2 + \pi \cdot 1^2 \\ &= \pi \cdot [(999 - 998)(999 + 998) + (997 - 996)(997 + 996) + \dots + (3 + 2)(3 - 2) + 1] \\ &= \pi \cdot (999 + 998 + \dots + 2 + 1) = \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot 999 \cdot 1000 = 499500\pi, \end{aligned}$$

deoarece suma dublă a numerelor de la 1 la 999 este egală cu:

$$(1 + 999) + (2 + 998) + \dots + (998 + 2) + (999 + 1) = 1000 \cdot 999.$$

7.3. Fiind date cinci numere întregi pozitive distincte, calculăm, pentru fiecare pereche, produsul acestor numere. Obținem 10 produse și scriem doar ultima cifră (cifra unităților) a fiecărui produs obținut.

(a) Găsiți un exemplu de cinci numere pentru care, la sfârșitul acestei operații, se obțin 8 cifre diferite din cele 10 cifre posibile.

(b) Explicați de ce nu este posibil să găsim un exemplu de cinci numere pentru care, la sfârșitul acestei operații, să se obțină 9 cifre diferite din cele 10 posibile.

**Soluție.** (a) Pot exista mai multe exemple.

Primul exemplu: 1, 2, 3, 5, 7, produsele perechi sunt: 2, 3, 5, 7, 6, 10, 14, 15, 21, 35, printre care există 8 cifre diferite: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Al doilea exemplu: 1, 2, 3, 7, 9, produsele perechi sunt: 2, 3, 7, 9, 6, 14, 18, 21, 27, 63, printre care există 8 cifre diferite: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9.

(b) Să presupunem că există un exemplu de cinci numere care, la sfârșitul acestei operații, produc 9 cifre diferite dintr-un număr posibil de 10. Atunci unul dintre produsele a două numere date se va termina în 5 sau 0. Aceasta înseamnă că unul dintre numerele date trebuie să fie divizibil cu 5. Acest număr apare în patru produse cu alte numere și acestea produsele se termină în 5 sau 0. Rămân alte șase produse de perechi de numere. Prin urmare, avem maximum 8 cifre diferite în locul unităților, o contradicție.

7.4. Tândală are 100 de animale: rațe, vaci și iepuri, pe care vrea să le aranjeze de-a lungul unui cerc. Pentru a se simți în siguranță, fiecare rață trebuie să stea lângă cel puțin o vacă, fie între doi iepuri. Dacă Tândală are 60 de rațe, care este cel mai mic număr de vaci necesar pentru a îndeplini această condiție? Explicați răspunsul.

**Soluție.** Putem aranja 21 de vaci, 19 iepuri și 60 de rațe pentru a rezolva problema. Să notăm  $U$  ca un iepure,  $V$  ca o vacă și  $\bullet$  ca o rață și să le aranjăm după cum urmează:

$$\underbrace{\bullet U \bullet U \bullet \dots \bullet U \bullet U \bullet}_{19 \text{ iepuri, } 20 \text{ de rațe}} \underbrace{V \bullet \bullet V \bullet \bullet V \bullet \bullet \dots \bullet \bullet V \bullet \bullet V \bullet \bullet V}_{21 \text{ de vaci, } 40 \text{ de rațe}}$$

În total, Tândală are 40 de vaci și iepuri. Cu cât Tândală are mai multe vaci, cu atât îi este mai ușor să finalizeze sarcina, deoarece orice iepure din cerc poate fi înlocuit cu o vacă, iar situația rațelor nu se va înrăutăți. Pentru a demonstra că 21 de vaci sunt minimumul necesar, vom demonstra că 20 de vaci sunt insuficiente pentru Tândală.

Observăm că nu mai mult de 40 de rațe pot fi lângă cele 20 de vaci, iar acestea se vor simți în siguranță dacă la dreapta și la stânga fiecărei vaci va fi plasată câte o rață. Celelalte 20 de rațe, cel puțin, trebuie protejate de cei 20 de iepuri rămași. Doar o rață poate fi plasată în siguranță între doi iepuri. Să asigurăm siguranța pentru 20 de rațe, folosind doar cu 20 de iepuri, Tândală trebuie să așeze iepurii și rațele alternativ pe tot parcursul cercului, ceea ce este imposibil.

## 69-я Республиканская Олимпиада по Математике

Первый день, 28 февраля 2026 г., VII класс

7.1. Упростите дробь и рационализируйте знаменатель выражения

$$\frac{\sqrt{5 + \sqrt{24}}}{\sqrt{10} + \sqrt{14} + \sqrt{15} + \sqrt{21}}.$$

**Решение.** Заметим, что

$$5 + \sqrt{24} = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = (\sqrt{3})^2 + 2(\sqrt{3})(\sqrt{2}) + (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2,$$

$$\sqrt{10} + \sqrt{14} + \sqrt{15} + \sqrt{21} = \sqrt{2}(\sqrt{5} + \sqrt{7}) + \sqrt{3}(\sqrt{5} + \sqrt{7}) = (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{5}).$$

Нашу дробь можно записать как

$$\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{5})} = \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2}.$$

7.2. Пусть дано натуральное число  $n$ . Нарисуем окружности с центром в одной точке и радиусами  $1, 2, \dots, n$ . Покрасим внешнее кольцо в черный цвет, следующее в белый цвет, следующее в черный цвет и так далее, попеременно меняя два цвета.



(а) Заданную последовательность действий сделали для  $n = 5$ . Найдите общую площадь, которая была закрашена в черный цвет (показаную на рисунке).

(б) Заданную последовательность действий сделали для  $n = 999$ . Найдите общую площадь, которая была закрашена в черный цвет.

**Решение.** (а) Площадь круга равна  $\pi R^2$ , где  $R$  радиус окружности. Площадь внешнего черного кольца равна разнице площади круга радиуса 5 минус площади круга радиуса 4:  $\pi \cdot 5^2 - \pi \cdot 4^2 = 9\pi$ . Площадь внутреннего черного кольца равна разнице площади круга радиуса 3 минус площади круга радиуса 2:  $\pi \cdot 3^2 - \pi \cdot 2^2 = 5\pi$ . Площадь внутреннего маленького круга равна  $\pi \cdot 1^2 = \pi$ . Общая площадь, которая была закрашена в черный цвет равна  $9\pi + 5\pi + \pi = 15\pi$ .

(б) Аналогично (а), общая площадь закрашенная в черный цвет равна

$$\begin{aligned} A &= \pi \cdot 999^2 - \pi \cdot 998^2 + \pi \cdot 997^2 - \pi \cdot 996^2 + \dots + \pi \cdot 3^2 - \pi \cdot 2^2 + \pi \cdot 1^2 \\ &= \pi [(999 - 998)(999 + 998) + (997 - 996)(997 + 996) + \dots + (3 + 2)(3 - 2) + 1] \\ &= \pi(999 + 998 + \dots + 2 + 1) = \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot 999 \cdot 1000 = 499500\pi, \end{aligned}$$

потому что две суммы чисел от 1 до 999 равны:

$$(1 + 999) + (2 + 998) + \dots + (998 + 2) + (999 + 1) = 1000 \cdot 999.$$

7.3. Если даны пять целых различных положительных чисел, для любой пары вычислим произведение этих чисел. Получаем 10 произведений и для каждого произведения запишем только последнюю цифру (разряд единиц).

(а) Найдите пример из пяти чисел для которых, в конце такой операции, получаются 8 различных цифр из возможных 10.

(б) Объясните, почему нельзя найти пример из пяти чисел для которых, в конце такой операции, получаются 9 различных цифр из возможных 10.

**Решение.** (а) Примеров может быть много.

Первый пример: 1, 2, 3, 5, 7, попарные произведения равны: 2, 3, 5, 7, 6, 10, 14, 15, 21, 35, среди которых встречаются 8 различных цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Второй пример: 1, 2, 3, 7, 9, попарные произведения равны: 2, 3, 7, 9, 6, 14, 18, 21, 27, 63, среди которых встречаются 8 различных цифр: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9.

(б) Допустим существует пример из пяти чисел у которого, в конце такой операции, получаются 9 различных цифр из возможных 10. Тогда одно из произведений двух заданных чисел будет заканчиваться на 5 или 0. Значит одно из заданных чисел должно делиться на 5. Это число появляется в четырех произведениях с другими числами, и эти произведения будут заканчиваться на 5 или 0. Остаются еще шесть других попарных произведений. Следовательно, у нас получится максимум 8 различных цифр в разряде единиц, противоречие.

7.4. У Тындалэ 100 животных — утки, коровы и кролики, которых он хочет расставить по кругу. Чтобы чувствовать себя в безопасности, каждая утка должна стоять либо рядом хотя бы с одной коровой, либо между двумя кроликами. Если у Тындалэ 60 уток, какое минимальное количество коров необходимо для выполнения этого условия? Объясните свой ответ.

**Решение.** Мы можем расположить 21 корову, 19 кроликов и 60 уток, удовлетворяя условию задачи. Обозначим, через  $U$  - кролика,  $V$  - корову,  $\bullet$  - утку, и расположим их так:

$$\underbrace{\bullet U \bullet U \bullet \dots \bullet U \bullet U \bullet}_{19 \text{ кроликов, } 20 \text{ уток}} \underbrace{V \bullet \bullet V \bullet \bullet V \bullet \bullet \dots \bullet \bullet V \bullet \bullet V \bullet \bullet V}_{21 \text{ корова, } 40 \text{ уток}}$$

Всего у Тындалэ 40 коров и кроликов. Чем больше у Тындалэ будет коров, тем проще ему справиться с заданием, потому что любого кролика в кругу, можно заменить на корову и ситуация для уток не ухудшится. Чтобы доказать, что 21 корова это необходимый минимум, докажем что 20 коров для Тындалэ недостаточно.

Заметим, что рядом с 20 коровами могут находиться не более 40 уток, которые будут себя чувствовать в безопасности сидя справа и слева от каждой коровы. Остальные, как минимум 20 уток, должны быть защищены 20 оставшимися кроликами. Между двумя кроликами можно безопасно посадить только одну утку. Для безопасности 20 уток, используя только 20 кроликов, Тындалэ нужно будет посадить кроликов и уток по всему кругу чередуя друг друга, что невозможно.