A 68-a Olimpiada Republicană de Matematică

A doua zi, 1 martie 2026, clasa a VII-a

7.5. Câțiva băieți și fete au participat la o competiție sportivă pentru copii. Numărul total de participanți nu a depășit 70. Greutatea medie a băieților a fost de 52 kg, a fetelor de 32 kg, iar greutatea medie a tuturor participanților la competiție a fost de 40,5 kg. Câți băieți și fete au participat la competiție?

Soluție. Fie b numărul de băieți și f numărul de fete. Atunci greutatea totală a băieților este de $52b$, greutatea totală a fetelor este de $32f$, iar greutatea medie a întregii clase este, respectiv, egală cu:

$$\frac{52b + 32f}{b + f} = 40.5.$$

Obținem $52b + 32f = 40.5(b + f)$, ceea ce dă $11.5b = 8.5f$. Înmulțind cu 2 pentru a elimina zecimale: $23b = 17f$. Deoarece b și f sunt numere întregi, numărul de băieți trebuie să fie divizibil cu 17, iar numărul de fete trebuie să fie divizibil cu 23, iar numerele lor trebuie să fie proporționale cu raportul dintre 17 și 23. Este ușor de observat că 17 băieți și 23 fete sunt singura soluție, deoarece celelalte soluții ne dau mai mult de 70 de participanți. Răspuns: 17 băieți și 23 fete.

7.6. Se dau numere reale pozitive $x < y$, care satisfac condiția: $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 7$.

(a) Între care două numere întregi consecutive se află numărul $\dfrac{y}{x}$?

(b) Determinați valoarea numerică a expresiei $\left(\dfrac{x - y}{x + y}\right)^3$ și exprimați-o printr-o fracție numerică simplă.

Soluție. (a) Observăm că $0 < \dfrac{x}{y} < 1$, ceea ce înseamnă $6 < \dfrac{y}{x} < 7$.

(b) Această expresie este echivalentă cu $x^2 + y^2 = 7xy$. Prin urmare, $(x - y)^2 = 5xy$ și $(x + y)^2 = 9xy$. Deducem că,

$$\frac{(x - y)^2}{(x + y)^2} = \frac{5xy}{9xy} = \frac{5}{9} \quad \text{și} \quad \frac{x - y}{x + y} = -\frac{\sqrt{5}}{3},$$

deoarece $x < y$. De unde, obținem

$$\left(\frac{x - y}{x + y}\right)^3 = \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^3 = -\frac{5\sqrt{5}}{27}.$$

7.7. Irina și Olga stau la capetele opuse ale unei piste de alergare drepte. Luând startul în același timp, ele trebuie să parcurgă distanța tur-retur fara opriri. Ele se întâlnesc pentru prima dată după ce Irina a alergat 100 de metri. Următoarea întâlnire are loc după ce Olga a alergat 150 de metri după prima întâlnire. Fiecare fată aleargă cu o viteză constantă. Determinați lungimea pistei de alergare.

Soluție. Fie lungimea pistei d metri, viteza Irinei v_a și viteza Olgăi v_b. Ele încep la capete opuse și aleargă distanța înainte și înapoi cu o viteză constantă. Fetele se întâlnesc pentru prima dată după ce Irina a alergat 100 metri, iar Olga $d - 100$ metri. Fie acest timp t_1. Atunci

$$v_a t_1 = 100, \qquad v_b t_1 = d - 100.$$

A doua întâlnire are loc după ce Olga a alergat 150 de metri. Aceasta înseamnă că va alerga până la marginea pistei 100 de metri, de unde a început Ira, și apoi va alerga încă 50 de metri. Irina va alerga apoi $d - 100$ metri până la marginea de unde a început Olga și încă $d - 50$ metri înainte de a se întâlni. Fie timpul scurs între prima și a doua întâlnire t_2. Atunci

$$v_a t_2 = 2d - 150, \qquad v_b t_2 = 150.$$

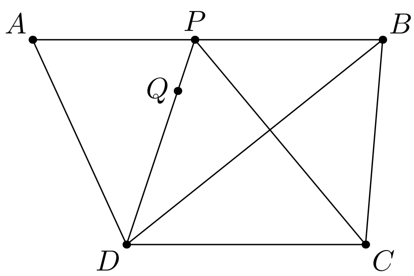
Prin urmare,

$$\frac{v_a}{v_b} = \frac{100}{d-100} = \frac{2d-150}{150}.$$

Rezolvând ecuația $(d - 100)(2d - 150) = 100 \cdot 150$, obținem $2d^2 = 350d$. Împărțim cu $2d$, obținem $d = 175\,\text{m}$.

7.8. În patrulaterul $ABCD$, laturile AB și CD sunt paralele între ele. Punctul P se află pe segmentul AB și se știe că $m(\angle BPC) = m(\angle DPC)$. Punctul Q se află pe segmentul DP, astfel încât $AP = DQ$. Demonstrați că $AD = CQ$.

Soluție. Deoarece $AB \parallel CD$, obținem $m(\angle PCD) = m(\angle BPC) = m(\angle DPC)$.



Prin urmare, triunghiul $\triangle PDC$ este isoscel și $PD = CD$. Deoarece laturile AB și CD sunt paralele între ele, rezultă și că $m(\angle APD) = m(\angle PDC)$. Rețineți că în triunghiurile $\triangle APD$ și $\triangle QDC$ avem:

$$AP = QD, \quad m(\angle APD) = m(\angle QDC), \quad PD = DC,$$

și, prin urmare, conform primului criteriu de congruență a triunghiurilor, acestea sunt congruente. Deducem că laturile corespondente ale acestor triunghiuri, AD și CQ, au lungimi egale.

69-я Республиканская Олимпиада по Математике

Второй день, 1 марта 2026 г., VII класс

7.5. В спортивном соревновании для детей участвовали мальчики и девочки. Всего количество участников было не больше чем 70. Средний вес мальчиков был равен 52 кг, девочек 32 кг, а средний вес всех участников в соревновании был равен 40.5 кг. Сколько мальчиков и девочек участвовали в соревновании?

Решение. Пусть b — количество мальчиков, а f — количество девочек. Тогда суммарный вес мальчиков будет $52b$, суммарный вес девочек $32f$ и средний вес всего класса соотвественно равен:

$$\frac{52b + 32f}{b + f} = 40,5.$$

Получаем $52b + 32f = 40,5(b + f)$, откуда $11,5b = 8,5f$. Умножая на 2, чтобы избавиться от десятичных знаков: $23b = 17f$. Поскольку b и f — целые числа, количество мальчиков должно делиться на 17 и количество девочек должно делиться на 23, и их число должно быть пропорционально отношению 17 к 23. Легко убедиться что 17 мальчиков и 23 девочки единственное решение, потому что другие решения дают нам большее чем 70 участников. Ответ: 17 мальчиков и 23 девочки.

7.6. Даны положительные действительные числа $x < y$, которые удовлетворяют условию: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 7$.

(а) Между какими двумя последовательными целыми числами находится число $\frac{y}{x}$?

(б) Найдите числовое значение выражения $\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^3$ и выразите его в виде простой числовой дроби.

Решение. (а) Заметим, что $0 < \frac{x}{y} < 1$, а значит $6 < \frac{y}{x} < 7$.

(б) Данное выражение равносильно $x^2 + y^2 = 7xy$. Значит $(x-y)^2 = 5xy$ и $(x+y)^2 = 9xy$. Следовательно

$$\frac{(x-y)^2}{(x+y)^2} = \frac{5xy}{9xy} = \frac{5}{9} \quad \text{и} \quad \frac{x-y}{x+y} = \frac{-\sqrt{5}}{3},$$

потому что $x < y$. Откуда получаем

$$\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^3 = \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^3 = -\frac{5\sqrt{5}}{27}.$$

7.7. Ира и Оля стоят на краях прямой беговой дорожки. Начиная одновременно они должны пробежать дистанцию дорожки туда и обратно. После сигнала девушки впервые встречаются после того, как Ира пробежала 100 метров. Следующая встреча происходит после того, как Оля пробежала 150 метров после первой точки встречи. Каждая девушка бежит с постоянной скоростью. Найдите длину беговой дорожки.

Решение. Пусть длина дорожки равна d метрам, скорость Иры равна v_a, а скорость Оли равна v_b. Они стартуют с противоположных концов и бегут дистанцию туда и обратно с постоянной скоростью. Девушки встречаются впервые после того, как Ира пробежала 100 м, а Оля $d - 100$ метров. Пусть это время будет t_1. Тогда

$$v_a t_1 = 100, \qquad v_b t_1 = d - 100.$$

Вторая встреча происходит после того как Оля пробежит 150 м. Значит она добежит до края дорожки 100 м, где стартовала Ира и после пробежит еще 50 м. Ира в это время пробежит $d - 100$ метров до края с которого стартовала Оля, и еще $d - 50$ метров до их встречи. Пусть это время которое прошло между первой и второй встречей будет t_2. Тогда

$$v_a t_2 = 2d - 150, \qquad v_b t_2 = 150.$$

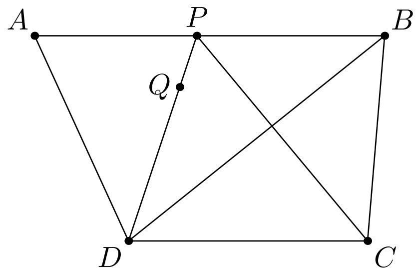
Следовательно

$$\frac{v_a}{v_b} = \frac{100}{d-100} = \frac{2d-150}{150}.$$

Решая уравнение $(d - 100)(2d - 150) = 100 \cdot 150$, получаем $2d^2 = 350d$. Сокращая на $2d$, получаем ответ $d = 175$ м.

7.8. В четырехугольнике $ABCD$, стороны AB и CD параллельны друг другу. Точка P лежит на отрезке AB, и известно что $m(\angle BPC) = m(\angle DPC)$. Точка Q лежит на отрезке DP, так что $AP = DQ$. Докажите, что $AD = CQ$.

Решение. Так как $AB \parallel CD$, получаем $m(\angle PCD) = m(\angle BPC) = m(\angle DPC)$.



Следовательно треугольник $\triangle PDC$ является равнобедренным и $PD = CD$. Из того, что стороны AB и CD параллельны друг другу также следует, что $m(\angle APD) = m(\angle PDC)$. Заметим что в треугольниках $\triangle APD$ и $\triangle QDC$ у нас:

$$AP = QD, \quad m(\angle APD) = m(\angle QDC), \quad PD = DC,$$

а значит из первого признака равенства треугольников они равны. Получаем, что соответствующие стороны этих треугольников, AD и CQ равны.