

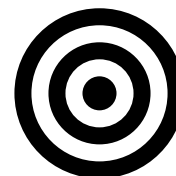
## A 69-a Olimpiada Republicană de Matematică

Prima zi, 28 februarie 2026, clasa a VII-a

7.1. Simplificați fracția și raționalizați numitorul expresiei

$$\frac{\sqrt{5 + \sqrt{24}}}{\sqrt{10} + \sqrt{14} + \sqrt{15} + \sqrt{21}}$$

7.2. Fie  $n$  un număr natural. Desenăm  $n$  cercuri de raze  $1, 2, \dots, n$  cu centrul comun. Desenul reprezintă un cerc mic și câteva inele. Vopsim figura, începând cu inelul exterior, pe care îl colorăm în negru, următorul inel îl colorăm în alb, următorul în culoare neagră și așa mai departe, până la cercul mic, alternând cele două culori.



(a) Procedura a fost efectuată pentru  $n = 5$ . Se obține desenul alăturat. Găsiți aria totală a suprafeței vopsite în negru.

(b) Aceeași procedură a fost efectuată pentru  $n = 999$ . Găsiți aria totală a suprafeței vopsite în negru.

7.3. Fiind date cinci numere întregi pozitive distincte, calculăm, pentru fiecare pereche, produsul acestor numere. Obținem 10 produse și scriem doar ultima cifră (cifra unităților) a fiecărui produs obținut.

(a) Găsiți un exemplu de cinci numere pentru care, la sfârșitul acestei operații, se obțin 8 cifre diferite din cele 10 cifre posibile.

(b) Explicați de ce nu este posibil să găsim un exemplu de cinci numere pentru care, la sfârșitul acestei operații, să se obțină 9 cifre diferite din cele 10 posibile.

7.4. Tândală are 100 de animale: rațe, vaci și iepuri, pe care vrea să le aranjeze de-a lungul unui cerc. Pentru a se simți în siguranță, fiecare rață trebuie să stea lângă cel puțin o vacă, fie între doi iepuri. Dacă Tândală are 60 de rațe, care este cel mai mic număr de vaci necesar pentru a îndeplini această condiție? Explicați răspunsul.

**Timp de lucru: 240 minute.**

Rezolvarea corectă a fiecărei probleme se apreciază cu 7 puncte. Mult succes!

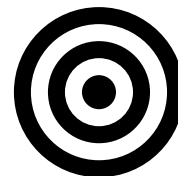
## 69-я Республиканская Олимпиада по Математике

Первый день, 28 февраля 2026 г., VII класс

7.1. Упростите дробь и рационализируйте знаменатель выражения

$$\frac{\sqrt{5 + \sqrt{24}}}{\sqrt{10} + \sqrt{14} + \sqrt{15} + \sqrt{21}}$$

7.2. Пусть дано натуральное число  $n$ . Нарисуем окружности с общим одним центром и радиусами  $1, 2, \dots, n$ . На рисунке будут маленький круг и несколько колец. Покрасим фигуру начиная с внешнего кольца в черный цвет, следующее в белый цвет, следующее в черный цвет и так далее, до маленькой окружности, попеременно меняя два цвета.



(а) Заданную последовательность действий сделали для  $n = 5$ . Полученный рисунок прилагается. Найдите общую площадь, которая была закрашена в черный цвет.

(б) Заданную последовательность действий сделали для  $n = 999$ . Найдите общую площадь, которая была закрашена в черный цвет.

7.3. Если даны пять целых различных положительных чисел, для любой пары вычислим произведение этих чисел. Получаем 10 произведений и для каждого произведения запишем только последнюю цифру (разряд единиц).

(а) Найдите пример из пяти чисел для которых, в конце такой операции, получаются 8 различных цифр из возможных 10.

(б) Объясните, почему нельзя найти пример из пяти чисел для которых, в конце такой операции, получаются 9 различных цифр из возможных 10.

7.4. У Тындалэ 100 животных — утки, коровы и кролики, которых он хочет расставить по кругу. Чтобы чувствовать себя в безопасности, каждая утка должна стоять либо рядом хотя бы с одной коровой, либо между двумя кроликами. Если у Тындалэ 60 уток, какое минимальное количество коров необходимо для выполнения этого условия? Объясните свой ответ.

**Время работы: 240 минут.**

Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. Желаем успехов!