**A 69-A OLIMPIADĂ REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ**
**Prima zi, 28 februarie 2026, Clasa a VIII–a**

**BAREM DE EVALUARE**

**Remarcă.** ***Rezolvarea corectă a oricărei probleme se apreciază cu 7 puncte.***

**8.1.** Fie $a, b, c$ trei numere întregi. Să se arate că dacă numerele $2a+b$ și $a+2b$ sunt divizibile cu $3c$, atunci numărul $a^3-3ab^2+2b^3$ este divizibil cu $27c^3$.

Rezolvare cu barem de evaluare

| Pas | Etape ale rezolvării | Punctaj acordat |
|---|---|---|
| 1. | Deduce relația $(a-b) \vdots 3c$. | 1 punct |
| 2. | Obține egalitatea $a^3-3ab^2+2b^3=a^3+2a^2b-2a^2b-4ab^2+ab^2+2b^3$. | 1 punct |
| 3. | Obține egalitatea $a^3+2a^2b-2a^2b-4ab^2+ab^2+2b^3=a^2(a+2b)-2ab(a+2b)+b^2(a+2b)$ | 1 punct |
| 4. | Obține egalitatea $a^2(a+2b)-2ab(a+2b)+b^2(a+2b)=(a^2-2ab+b^2)(a+2b)$. | 1 punct |
| 5. | Obține egalitatea $(a^2-2ab+b^2)(a+2b)=(a-b)^2(a+2b)$. | 1 punct |
| 6. | Obține egalitatea $(a-b)^2(a+2b)=(a-b)(a-b)(a+2b)$. | 1 punct |
| 7. | Deduce $(a-b)(a-b)(a+2b) \vdots 27c^3$. | 1 punct |
| | Punctaj total | 7 puncte |

**8.2.** Să se determine mulțimea numerelor reale *x* care satisfac egalitatea

$$\left|2x-|3x+1|\right|-\left|3x+|2x-1|\right|=0.$$

Rezolvare cu barem de evaluare

| Pas | Etape ale rezolvării | Punctaj acordat |
|---|---|---|
| 1. | Rescrie egalitatea în forma $\left|2x-|3x+1|\right|=\left|3x+|2x-1|\right|$. (1) | 1 punct |
| 2. | Ridică la pătrat în (1) și obține egalitatea $10x=6x\|2x-1\|+4x\|3x+1\|$. | 1 punct |
| 3. | Deduce echivalența $(10x=6x\|2x-1\|+4x\|3x+1\|) \Leftrightarrow (1=6x^2-x+\|6x^2-x-1\|)$. | 1 punct |
| 4. | Deduce echivalența $(1=6x^2-x+\|6x^2-x-1\|) \Leftrightarrow (6x^2-x-1\leq 0)$. | 1 punct |
| 5. | Deduce că $(6x^2-x-1\leq 0) \Leftrightarrow \left(\begin{cases}2x-1\leq 0\\3x+1\geq 0\end{cases} \text{ sau } \begin{cases}2x-1\geq 0\\3x+1\leq 0\end{cases}\right)$. | 6 punc t |
| 6. | Rezolvă sistemul $\begin{cases}2x-1\leq 0\\3x+1\geq 0\end{cases}$ și obține $x\in\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$. | 1 punct |
| 7. | Rezolvă sistemul $\begin{cases}2x-1\geq 0\\3x+1\leq 0\end{cases}$, obține $x\in\emptyset$ și scrie răspunsul final $x\in\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$. | 1 punct |
| | Punctaj total | 7 puncte |

| | | |
|---|---|---|
| **8.3.** În triunghiul $ABC$ punctul $M$ este mijlocul laturii $[BC]$. Pe latura $[AC]$ se ia un punct arbitrar $E$, diferit de $A$ și $C$. Segmentele $[AM]$ și $[BE]$ se intersectează în punctul $D$. Arătați că $AE \cdot BD = AC \cdot DE$. | | |
| Rezolvare cu barem de evaluare | | |
| Pas | Etape ale rezolvării | Punctaj acordat |
| 1. | Prelungește segmentul $[AM]$ cu segmentul $[MK]$, astfel încât $MK = DM$. | 2 punct |
| 2. | Arată congruența triunghiurilor $MKC$ și $MDB$. | 1 punct |
| 3. | Concluzionează că $\angle MCK \cong \angle MBD$ și $CK = BD$. | 1 punct |
| 4. | Concluzionează că $BD \parallel KC$, și că triunghiurile $AED$ și $ACK$ sunt asemănarea. | 1 punct |
| 5. | Scrie raportul $\frac{AE}{AC} = \frac{ED}{CK}$ și deduce $\frac{AE}{ED} = \frac{AC}{CK} = \frac{AC}{BD}$. | 1 punct |
| 6. | De aici obținem $AE \cdot BD = AC \cdot DE$. | 1 punct |
| | Punctaj total | 7 puncte |

| | | |
|---|---|---|
| **8.4.** Numerele reale pozitive $a, b, c, x, y, z$ satisfac egalitatea $ac + 2bc - xz - 2yz = 0$. Demonstrați că $\frac{a+2b+3z}{x+2y+3c} + \frac{c}{z} \geq 2$. | | |
| Rezolvare cu barem de evaluare | | |
| Pas | Etape ale rezolvării | Punctaj acordat |
| 1. | Obține egalitatea $(a + 2b)c = (x + 2y)z$. | 1 punct |
| 2. | Obține egalitatea $\frac{a+2b}{x+2y} = \frac{z}{c}$. | 1 punct |
| 3. | Scrie egalitatea $\frac{a+2b}{x+2y} = \frac{z}{c} = \frac{3z}{3c}$. | 1 punct |
| 4. | Obține egalitatea $\frac{a+2b+3z}{x+2y+3c} = \frac{z}{c}$. | 1 punct |
| 5. | Scrie egalitatea $\frac{a+2b+3z}{x+2y+3c} + \frac{c}{z} = \frac{a+2b+3z}{x+2y+3c} + \frac{1}{\frac{z}{c}}$. | 1 punct |
| 6. | Obține egalitatea $\frac{a+2b+3z}{x+2y+3c} + \frac{1}{\frac{z}{c}} = \frac{a+2b+3z}{x+2y+3c} + \frac{1}{\frac{a+2b+3z}{x+2y+3c}}$. | 1 punct |
| 7. | Demonstrează că pentru orice număr real pozitiv $A$ relația $A + \frac{1}{A} \geq 2$ este adevărată. | 1 punct |
| | Punctaj total | 7 puncte |