A 69-A OLIMPIADĂ REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
A doua zi, 1 martie 2026, Clasa a VIII–a

BAREM DE EVALUARE

Remarcă. ***Rezolvarea corectă a oricărei probleme se apreciază cu 7 puncte.***

8.5. Rezolvați în numere reale inegalitatea $[x-1]\cdot\{x\}<x-2$, unde $[A]$ este partea întreagă, iar $\{A\}$ este partea fracționară a numărului real A.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Utilizează egalitățile $x=[x]+\{x\}$ și $[x+n]=[x]+n$, care sunt adevărate pentru orice număr real x și orice număr întreg n și rescrie inegalitatea în forma: $([x]-1)\cdot\{x\}<[x]+\{x\}-2.$ (2)	1 punct
2.	Obține inegalitatea $([x]-1)\cdot\{x\}-([x]-1)-(\{x\}-1)<0$, echivalentă cu (2).	1 punct
3.	Obține inegalitatea $([x]-1)\cdot(\{x\}-1)-(\{x\}-1)<0$	1 punct
4.	Obține inegalitatea $([x]-2)\cdot(\{x\}-1)<0$ (3)	1 punct
5.	Argumentează că $\{x\}-1<0$ pentru orice $x\in R$.	1 punct
6.	Obține echivalența $([x]-2)\cdot(\{x\}-1)<0 \Leftrightarrow [x]-2>0$.	1 punct
7.	Rezolvă inegalitatea $[x]-2>0$ și obține soluția $x\in[3,+\infty)$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

8.6. Fie $a,b,c\in R$ astfel încât $|ax^2+bx+c|\le 1$ pentru orice $x\in[-1;1]$. Să se arate că
$$a^2+b^2+c^2\le 5.$$

Rezolvare cu barem de evaluare

Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Obține sistemul $\begin{cases}\lvert a+b+c\rvert\le 1\\ \lvert a-b+c\rvert\le 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1\le a+b+c\le 1\\ -1\le a-b+c\le 1\end{cases}$ (1)	1 punct
2.	Obține $\lvert c\rvert\le 1$ (2)	1 punct
3.	Adună relațiile din dreapta (1) și obține $\lvert a+c\rvert\le 1$.	1 punct
4.	Obține $\lvert a\rvert\le 1+\lvert c\rvert$.	1 punct
5.	Obține $\lvert ac\rvert\le(1+\lvert c\rvert)\lvert c\rvert\le 2.$ (3)	1punct
6.	Obține sistemul $\begin{cases}a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\le 1\\ a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc\le 1\end{cases}$ (4)	1 punct
7.	Prin adunare în (4) și alte transformări obține $a^2+b^2+c^2\le 1-2ac \le 1+2\lvert ac\rvert\le 1+2\cdot 2=5.$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

8.7. În triunghiul ABC pe laturile $[AB]$ și $[AC]$ se iau punctele $C_1 \in [AB]$ și $B_1 \in [AC]$, astfel încât $\frac{AC_1}{C_1B} + \frac{AB_1}{B_1C} = 1$. Arătați că segmentele $[BB_1]$ și $[CC_1]$ se intersectează pe linia mijlocie $[MN]$ a triunghiului (M este mijlocul laturii $[AB]$, iar N este mijlocul laturii $[AC]$).

Rezolvare cu barem de evaluare

Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Argumentează că $B_1 \in [AN]$ și $C_1 \in [AM]$. Prelungește segmentul $[AM]$ cu segmentul $[MK]$, astfel încât $MK = DM$.	1 punct
2.	Arată că triunghiurile DB_1N și BB_1C sunt asemenea.	1 punct
3.	Arată că $\frac{DN}{BC} = \frac{AC}{2\,B_1C} - \frac{AB_1}{B_1C}$.	1 punct
4.	Arată că $\frac{AC}{2\,B_1C} - \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{1}{2} - \frac{AB_1}{2\,B_1C}$.	1 punct
5.	Analogic arată că triunghiurile EC_1M și CC_1B sunt asemenea și $\frac{ME}{BC} = \frac{1}{2} - \frac{AC_1}{2\,C_1B}$.	1 punct
6.	Arată că $\frac{DN+EM}{BC} = \frac{1}{2}$ și $DN + EM = \frac{BC}{2} = MN$.	1 punct
7.	Concluzionează: cum punctele M, D, E, N sunt coliniare, rezultă că punctele D și E coincid, iar segmentele $[BB_1]$ și $[CC_1]$ se intersectează pe linia mijlocie $[MN]$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

8.8. Se consideră mulțimea $M = \{y \mid y = \frac{2x^2+5x+9}{2x+3}, x \in Q_+\}$. Să se determine mulțimea $M \cap Z$, unde Q_+este mulțimea numerelor raționale nenegative, iar Z este mulțimea numerelor întregi.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Arată că $y > 0$, $M \cap Z \subseteq N^*$ și obține egalitatea $2x^2 + (5-2y)x + 9 - 3y = 0$. (2)	1 punct
2.	Rezolvă ecuația (2) în x în raport cu parametrul $y \in N^*$, cu soluții în Q_+. Obține discriminantul $\Delta = 4 \cdot y^2 + 4y - 47$. (3)	1 punct
3.	Argumentează că Δ trebuie să fie pătrat perfect ($\Delta = k^2$), iar pentru $y \in \{0,1,2\}$ avem $\Delta < 0$ și concluzionează că $y \geq 3$.	1 punct
4.	Arată că k este impar, $k = 2h + 1$, $h \in N$. Obține $(y-h)(y+h+1) = 12$.	1 punct
5.	Obține că divizorii $y - h$, și $y + h + 1$ sunt pozitivi, de parități diferite și diferiți de 6.	1 punct
6.	Arată că $y + h + 1 \in \{4, 12\}$, rezolvă sistemul $\begin{cases} y+h+1=4 \\ y-h=3 \end{cases}$ și obține $y = 3$ pentru numerele raționale nenegative $x_1 = 0$ și $x_2 = \frac{1}{2}$.	1 punct
7.	Rezolvă sistemul $\begin{cases} y+h+1=12 \\ y-h=1 \end{cases}$ și obține $y = 6$ se obține pentru un număr rațional nenegativ $x_2 = \frac{9}{2}$. Scrie răspunsul $M \cap Z = \{3, 6\}$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte