69-Я РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
Первый день, 28 февраля 2026 г., VIII класс

СХЕМА ПРОВЕРКИ ТЕСТА

Примечание. ***Правильное решение любой задачи оценивается в 7 баллов.***

8.1. . Пусть a, b, c — три целых числа. Докажите, что если числа $2a+b$ и $a+2b$ делятся на $3c$, то число $a^3-3ab^2+2b^3$ делится на $27c^3$.

Решение со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Выводит соотношение $(a-b) \vdots 3c$.	1 балл
2.	Получает равенство $a^3-3ab^2+2b^3 = a^3+2a^2b-2a^2b-4ab^2+ab^2 2b^3$.	1 балл
3.	Получает равенство $a^3+2a^2b-2a^2b-4ab^2+ab^2+2b^3 = a^2(a+2b)-2ab(a+2b)+b^2(a+2b)$.	1 балл
4.	Получает равенство $a^2(a+2b)-2ab(a+2b)+b^2(a+2b) = (a^2-2ab+b^2)(a+2b)$.	1 балл
5.	Получает равенство $(a^2-2ab+b^2)(a+2b) = (a-b)^2(a+2b)$.	1 балл
6.	Получает равенство $(a-b)^2(a+2b) = (a-b)(a-b)(a+2b)$.	1 балл
7.	Выводит соотношение $(a-b)(a-b)(a+2b) \vdots 27c^3$.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

8.2. Определите множество действительных чисел x, удовлетворяющих равенству
$$\big|2x-|3x+1|\big| - \big|3x+|2x-1|\big| = 0.$$

Решение со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Переписывает равенство в форме $\big|2x-|3x+1|\big| = \big|3x+|2x-1|\big|$. (1)	1 балл
2.	Возводит (1) в квадрат и получает равенство $10x = 6x\|2x-1\|+4x\|3x+1\|$.	1 балл
3.	Выводит эквивалентность $(10x = 6x\|2x-1\|+4x\|3x+1\|) \Leftrightarrow (1 = 6x^2-x+\|6x^2-x-1\|)$.	1 балл
4.	Выводит эквивалентность $(1 = 6x^2-x+\|6x^2-x-1\|) \Leftrightarrow (6x^2-x-1 \le 0)$.	1 балл
5.	Выводит, что $(6x^2-x-1 \le 0) \Leftrightarrow \left(\begin{cases}2x-1\le 0\\3x+1\ge 0\end{cases} \text{ или } \begin{cases}2x-1\ge 0\\3x+1\le 0\end{cases}\right)$.	1 балл
6.	Решает систему $\begin{cases}2x-1\le 0\\3x+1\ge 0\end{cases}$ и получает $x \in \left[-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$.	1 балл
7.	Решает систему $\begin{cases}2x-1\ge 0\\3x+1\le 0\end{cases}$, получает $x \in \emptyset$ и записывает окончательный ответ $x \in \left[-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

8.3. В треугольнике ABC точка M — середина стороны $[BC]$. На стороне $[AC]$ взята произвольная точка E, отличная от A и C. Отрезки $[AM]$ и $[BE]$ пересекаются в точке D. Докажите, что $AE \cdot BD = AC \cdot DE$.		
Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Продолжает сегмент $[AM]$ сегментом $[MK]$, таким образом, чтобы $MK = DM$.	2 балл
2.	Показывает конгруэнтность треугольников MKC и MDB.	1 балл
3.	Выводит, что $\angle MCK \cong \angle MBD$ и $CK = BD$.	1 балл
4.	Выводит, что $BD \parallel KC$, и что треугольники AED и ACK подобны.	1 балл
5.	Записывает отношение $\frac{AE}{AC} = \frac{ED}{CK}$ и выводит $\frac{AE}{ED} = \frac{AC}{CK} = \frac{AC}{BD}$.	1 балл
6.	Отсюда получает $AE \cdot BD = AC \cdot DE$.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

8.4. Положительные действительные числа a, b, c, x, y, z удовлетворяют равенству: $ac + 2bc - xz - 2yz = 0$. Докажите, что $\frac{a+2b+3z}{x+2y+3c} + \frac{c}{z} \geq 2$.		
Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Получает равенство $(a + 2b)c = (x + 2y)z$.	1 балл
2.	Получает равенство $\frac{a+2b}{x+2y} = \frac{z}{c}$.	1 балл
3.	Пишет отношение $\frac{a+2b}{x+2y} = \frac{z}{c} = \frac{3z}{3c}$.	1 балл
4.	Получает равенство $\frac{a+2b+3z}{x+2y+3c} = \frac{z}{c}$.	1 балл
5.	Пишет равенство $\frac{a+2b+3z}{x+2y+3c} + \frac{c}{z} = \frac{a+2b+3z}{x+2y+3c} + \frac{1}{\frac{z}{c}}$.	1 балл
6.	Получает равенство $\frac{a+2b+3z}{x+2y+3c} + \frac{1}{\frac{z}{c}} = \frac{a+2b+3z}{x+2y+3c} + \frac{1}{\frac{a+2b+3z}{x+2y+3c}}$.	1 балл
7.	Доказывает, что для любого положительного действительного числа A справедливо соотношение $A + \frac{1}{A} \geq 2$.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов