69-Я РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
Второй день, 1 марта 2026 г., VIII класс

СХЕМА ПРОВЕРКИ ТЕСТА

Примечание. ***Правильное решение любой задачи оценивается в 7 баллов.***

8.5. Решите в действительных числах неравенство $[x-1]\cdot\{x\} < x-2$, где $[A]$ — целая часть, а $\{A\}$ — дробная часть действительного числа A.

Решение со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Использует равенства $x=[x]+\{x\}$ и $[x+n]=[x]+n$, которые верны для любого действительного числа x и любого целого числа n, и переписывает неравенство в виде $([x]-1)\cdot\{x\} < [x]+\{x\}-2$. (2)	1 балл
2.	Получает неравенство $([x]-1)\cdot\{x\}-([x]-1)-(\{x\}-1)<0$, эквивалентное с (2).	1 балл
3.	Получает неравенство $([x]-1)\cdot(\{x\}-1)-(\{x\}-1)<0$	1 балл
4.	Получает неравенство $([x]-2)\cdot(\{x\}-1)<0$ (3)	1 балл
5.	Аргументирует что $\{x\}-1<0$ для любого $x\in R$.	1 балл
6.	Получает эквивалентность $([x]-2)\cdot(\{x\}-1)<0 \Leftrightarrow [x]-2>0$.	1 балл
7.	Решает неравенство $[x]-2>0$ и получает решение $x\in[3,+\infty)$.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

8.6. Пусть $a,b,c\in R$ такие, что $|ax^2+bx+c|\le 1$ для любого $x\in[-1;1]$. Покажите, что $a^2+b^2+c^2\le 5$.

Решение со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Получает систему $\begin{cases}\lvert a+b+c\rvert\le 1\\ \lvert a-b+c\rvert\le 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1\le a+b+c\le 1\\ -1\le a-b+c\le 1\end{cases}$ (1)	1 балл
2.	Получает $\lvert c\rvert\le 1$ (2)	1 балл
3.	Делает сложение правых отношений в (1) и получает $\lvert a+c\rvert\le 1$.	1 балл
4.	Получает $\lvert a\rvert\le 1+\lvert c\rvert$.	1 балл
5.	Получает $\lvert ac\rvert\le(1+\lvert c\rvert)\lvert c\rvert\le 2$. (3)	1 балл
6.	Получает систему $\begin{cases}a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\le 1\\ a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc\le 1\end{cases}$ (4)	1 балл
7.	Делает сложение неравенств в (4) и другие преобразования, и получает $a^2+b^2+c^2\le 1-2ac \le 1+2\lvert ac\rvert\le 1+2\cdot 2=5$.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

8.7. В треугольнике ABC со сторонами $[AB]$ и $[AC]$ возьмем точки $C_1\in[AB]$ и $B_1\in[AC]$ такие, что $\frac{AC_1}{C_1B}+\frac{AB_1}{B_1C}=1$. Покажите, что отрезки $[BB_1]$ и $[CC_1]$ пересекаются на средней линии $[MN]$ треугольника (M — середина стороны $[AB]$, а N — середина стороны $[AC]$).

Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Аргументирует что $B_1 \in [AN]$ și $C_1 \in [AM]$. Продолжает сегмент $[AM]$ сегментом $[MK]$, таким образом что $MK = DM$.	1 балл
2.	Показывает что треугольники DB_1N и BB_1C подобны.	1 балл
3.	Показывает что $\frac{DN}{BC} = \frac{AC}{2\,B_1C} - \frac{AB_1}{B_1C}$.	1 балл
4.	Показывает что $\frac{AC}{2\,B_1C} - \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{1}{2} - \frac{AB_1}{2\,B_1C}$.	1 балл
5.	Аналогично показывает что треугольники EC_1M и CC_1B подобны и что $\frac{ME}{BC} = \frac{1}{2} - \frac{AC_1}{2\,C_1B}$.	1 балл
6.	Показывает что $\frac{DN+EM}{BC} = \frac{1}{2}$ и $DN + EM = \frac{BC}{2} = MN$.	1 балл
7.	Делает вывод: поскольку точки M, D, E, N лежат на одной прямой, то точки D и E совпадают, а отрезки $[BB_1]$ и $[CC_1]$ пересекаются на средней линии $[MN]$.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

8.8. Рассмотрим множество $M = \{y \mid y = \frac{2x^2+5x+9}{2x+3}, x \in Q_+\}$. Определите множество $M \cap Z$, где Q_+ — множество неотрицательных рациональных чисел, а Z — множество целых чисел.

Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Показывает что $y > 0$, $M \cap Z \subseteq N^*$ и получает равенство $2x^2 + (5-2y)x + 9 - 3y = 0$. (2)	1 балл
2.	Решает уравнение (2) относительно x по параметру $\in N^*$, при этом решения находятся в Q_+. Получает дискриминант $\Delta = 4 \cdot y^2 + 4y - 47$. (3)	1 балл
3.	Аргументирует, что Δ должен быть полным квадратом ($\Delta = k^2$), и для $y \in \{0,1,2\}$ имеем $\Delta < 0$ и делает вывод, что $y \geq 3$.	1 балл
4.	Показывает что k – нечетное число, $k = 2h + 1$, $h \in N$. Получает $(y-h)(y+h+1) = 12$.	1 балл
5.	Получает что делители $y - h$, и $y + h + 1$ – положительные числа, разной четности и отличные от 6.	1 балл
6.	Показывает что $y + h + 1 \in \{4, 12\}$, решает систему $\begin{cases} y + h + 1 = 4 \\ y - h = 3 \end{cases}$ и получает $y = 3$ для неотрицательных рациональных чисел $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{1}{2}$.	1 балл
7.	Решает систему $\begin{cases} y + h + 1 = 12 \\ y - h = 1 \end{cases}$ и получает $y = 6$ для неотрицательных рационального числа $x_2 = \frac{9}{2}$. Пишет ответ $M \cap Z = \{3,\ 6\}$.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов