A 69-A OLIMPIADĂ REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
Prima zi, 28 februarie 2026, Clasa a VIII–a
Soluții

8.1. Fie a, b, c trei numere întregi. Să se arate că dacă numerele $2a + b$ și $a + 2b$ sunt divizibile cu $3c$, atunci numărul $a^3 - 3ab^2 + 2b^3$ este divizibil cu $27c^3$.

Soluție. Avem:

1. $\begin{cases}(2a+b) \vdots 3c \\ (a+2b) \vdots 3c\end{cases} prin\ scădere \ \Rightarrow (a-b) \vdots 3c;$

2. $a^3 - 3ab^2 + 2b^3 = a^3 + 2a^2b - 2a^2b - 4ab^2 + ab^2 + 2b^3 =$

$$= a^2(a+2b) - 2ab(a+2b) + b^2(a+2b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a+2b) =$$
$$= (a-b)^2(a+2b) = (a-b)(a-b)(a+2b) \vdots 3c \cdot 3c \cdot 3c$$

3. Deci $(a^3 - 3ab^2 + 2b^3) \vdots 27c^3$

8.2. Să se determine mulțimea numerelor reale x care satisfac egalitatea

$$\big|2x - |3x+1|\big| - \big|3x + |2x-1|\big| = 0.$$

Soluție. Obținem $\big|2x - |3x+1|\big| - \big|3x + |2x-1|\big| = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \big|2x - |3x+1|\big| = \big|3x + |2x-1|\big|. \qquad (1)$$

Prin ridicarea la pătrat în (1) și utilizarea proprietății $|A|^2 = A^2, \ \forall A \in R$, obținem

$$(2x - |3x+1|)^2 = (3x + |2x-1|)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x|3x+1| + 9x^2 + 6x + 1 = 9x^2 + 6x|2x-1| + 4x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4x|3x+1| + 6x = 6x|2x-1| - 4x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10x = 6x|2x-1| + 4x|3x+1|. \qquad (2)$$

Din (2), pentru $x = 0$ obținem $0 = 0$, astfel egalitatea este adevărată, deci 0 se va conține în soluție.
Dacă $x \neq 0$, atunci din (2), prin împărțirea la x obținem

$$10 = 6|2x-1| + 4|3x+1| \Leftrightarrow 5 = 3|2x-1| + 2|3x+1| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 25 = 36x^2 - 36x + 9 + 12|2x-1||3x+1| + 36x^2 + 24x + 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 12 = 72x^2 - 12x + 12|6x^2 - x - 1| \Leftrightarrow 1 = 6x^2 - x + |6x^2 - x - 1| \Leftrightarrow$$

Remarcăm că egalitatea $1 = 6x^2 - x + |6x^2 - x - 1|$ este adevărată și pentru $x = 0$. Astfel am arătat ecivalența $(10x = 6x|2x-1| + 4x|3x+1|) \Leftrightarrow (1 = 6x^2 - x + |6x^2 - x - 1|)$. Obținem $(1 = 6x^2 - x + |6x^2 - x - 1|) \Leftrightarrow (0 = 6x^2 - x - 1 + |6x^2 - x - 1|) \Leftrightarrow (6x^2 - x - 1 \leq 0)$.
(Dacă ar fi $6x^2 - x - 1 > 0$, atunci $6x^2 - x - 1 + |6x^2 - x - 1| > 0$, contradicție). În continuare avem $6x^2 - x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 1 + 2x^2 - x \leq 0 \Leftrightarrow (2x-1)(2x+1) + x(2x-1) \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (2x-1)\big((2x+1) + x\big) \leq 0 \Leftrightarrow (2x-1)(3x+1) \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x - 1 \leq 0 \\ 3x + 1 \geq 0\end{cases} sau \ \begin{cases}2x - 1 \geq 0 \\ 3x + 1 \leq 0\end{cases}.$$

Rezolvăm aceste sisteme:

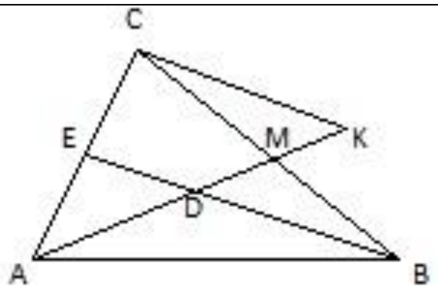
1. $\begin{cases}2x - 1 \leq 0 \\ 3x + 1 \geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x \geq -\frac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right];$

2. $\begin{cases}2x - 1 \geq 0 \\ 3x + 1 \leq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \leq -\frac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$

Deci răspunsul este $x \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$.

8.3. În triunghiul ABC punctul M este mijlocul laturii $[BC]$. Pe latura $[AC]$ se ia un punct arbitrar E, diferit de A și C. Segmentele $[AM]$ și $[BE]$ se intersectează în punctul D. Arătați că $AE \cdot BD = AC \cdot DE$.

Soluție. Prelungim segmentul $[AM]$ cu segmentul $[MK]$, astfel încât $MK = DM$ ($M \in [DK]$).



Obținem: 1) $MK = DM$; 2) $CM = MB$ 3) $\angle CMK \cong \angle BMD$ – opuse la vârf, atunci triunghiurile MKC și MDB sunt congruente (LUL). Ca urmare, $\angle MCK \cong \angle MBD$ și $CK = BD$. De aici rezultă că $BD \parallel KC$. Deci $ED \parallel CK$, iar triunghiurile AED și ACK sunt asemenea conform teoremei fundamentale a asemănării. Din asemănare avem, $\frac{AE}{AC} = \frac{ED}{CK}$ și

Deci $\frac{AE}{ED} = \frac{AC}{CK} = \frac{AC}{BD}$.

De aici obținem $AE \cdot BD = AC \cdot DE$.

8.4. Numerele reale pozitive a, b, c, x, y, z satisfac egalitatea $ac + 2bc - xz - 2yz = 0$. Demonstrați că $\frac{a+2b+3z}{x+2y+3c} + \frac{c}{z} \geq 2$.

Soluție. Remarcăm că orice sumă de numere pozitive este pozitivă. În continuare avem

$$ac + 2bc - xz - 2yz = 0 \Leftrightarrow (a + 2b)c - (x + 2y)z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a + 2b)c = (x + 2y)z \Leftrightarrow \frac{a + 2b}{x + 2y} = \frac{\mathrm{z}}{\mathrm{c}} \Leftrightarrow \frac{a + 2b}{x + 2y} = \frac{\mathrm{z}}{\mathrm{c}} = \frac{3\mathrm{z}}{3\mathrm{c}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a + 2b}{x + 2y} = \frac{\mathrm{z}}{\mathrm{c}} = \frac{3\mathrm{z}}{3\mathrm{c}} = \frac{a + 2b + 3z}{x + 2y + 3c} \Rightarrow \frac{a + 2b + 3z}{x + 2y + 3c} = \frac{\mathrm{z}}{\mathrm{c}}.$$

Atunci avem

$$\frac{a + 2b + 3z}{x + 2y + 3c} + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{z}} = \frac{a + 2b + 3z}{x + 2y + 3c} + \frac{1}{\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{c}}} = \frac{a + 2b + 3z}{x + 2y + 3c} + \frac{1}{\frac{a + 2b + 3z}{x + 2y + 3c}} \geq 2,$$

Deoarece pentru orice număr real pozitiv A relația $A + \frac{1}{A} \geq 2$ este adevărată:

$A + \frac{1}{A} \geq 2 \Leftrightarrow \mathrm{A}^2 + 1 \geq 2A \Leftrightarrow \mathrm{A}^2 - 2A + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\mathrm{A} - 1)^2 \geq 0$, adevărat.