A 69-A OLIMPIADĂ REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
Prima zi, 28 februarie 2026, Clasa a VIII–a
Soluții

8.5. Rezolvați în numere reale inegalitatea $[x-1]\cdot\{x\}<x-2$, unde $[A]$ este partea întreagă, iar $\{A\}$ este partea fracționară a numărului real A.

Soluție. Vom utiliza proprietățile:

1) $x=[x]+\{x\}$; 2) $0\le\{x\}<1$; 3) $[x+n]=[x]+n$, (1)

care sunt adevărate pentru orice număr real x și orice număr întreg n.

Rescriem inegalitatea în forma: $([x]-1)\cdot\{x\}<[x]+\{x\}-2$. (2)

Obținem

$$
\begin{aligned}
&([x]-1)\cdot\{x\}<[x]+\{x\}-2 \Leftrightarrow ([x]-1)\cdot\{x\}<([x]-1)+(\{x\}-1)\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow([x]-1)\cdot\{x\}-([x]-1)-(\{x\}-1)<0\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow([x]-1)\cdot(\{x\}-1)-(\{x\}-1)<0\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow(([x]-1)-1)\cdot(\{x\}-1)<0\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow([x]-2)\cdot(\{x\}-1)<0 \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Din proprietatea $0\le\{x\}<1$ obținem $\{x\}-1<0$ pentru orice $x\in R$. Atunci avem

$$([x]-2)\cdot(\{x\}-1)<0\Leftrightarrow[x]-2>0 \Leftrightarrow [x]>2\Leftrightarrow[x]\ge3\Leftrightarrow x\in[3,+\infty).$$

Răspuns: $x\in[3,+\infty)$.

8.6. Fie $a,b,c\in R$ astfel încât $|ax^2+bx+c|\le1$ pentru orice $x\in[-1;1]$. Să se arate că

$$a^2+b^2+c^2\le5.$$

Soluție. Pentru $x=1$ și $x=-1$ obținem:

$$\begin{cases}|a+b+c|\le1\\|a-b+c|\le1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le a+b+c\le1\\-1\le a-b+c\le1\end{cases} \qquad (1)$$

Pentru $x=0$ obținem:

$$|c|\le1 \qquad (2)$$

Adunăm relațiile din (1) și obținem:

$-2\le2a+2c\le2\Leftrightarrow-1\le a+c\le1\Leftrightarrow|a+c|\le1$.

Din proprietățile modulului avem

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow|a|-|c|\le|a+c|\le1\Rightarrow|a|\le1+|c|\Leftrightarrow|a||c|\le(1+|c|)|c|\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow|ac|\le(1+|c|)|c|\le2 \qquad (3)
\end{aligned}
$$

În continuare avem:

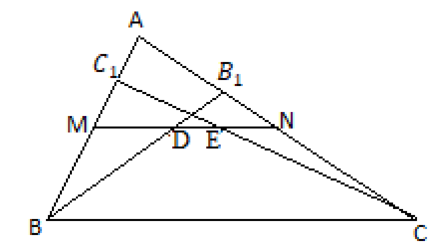
$$
\begin{aligned}
&\begin{cases}|a+b+c|\le1\\|a-b+c|\le1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|a+b+c|^2\le1\\|a-b+c|^2\le1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b+c)^2\le1\\(a-b+c)^2\le1\end{cases}\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\le1\\a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc\le1\end{cases} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Prin adunare în (4) obținem

$$
\begin{aligned}
&2(a^2+b^2+c^2)+4ac\le2 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2ac\le1\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\le1-2ac \le1+2|ac|\le1+2\cdot2=5.
\end{aligned}
$$

8.7. În triunghiul ABC pe laturile $[AB]$ și $[AC]$ se iau punctele $C_1 \in [AB]$ și $B_1 \in [AC]$, astfel încât $\frac{AC_1}{C_1B} + \frac{AB_1}{B_1C} = 1$. Arătați că segmentele $[BB_1]$ și $[CC_1]$ se intersectează pe linia mijlocie $[MN]$ a triunghiului (M este mijlocul laturii $[AB]$, iar N este mijlocul laturii $[AC]$).

Soluție. Menționăm că $B_1 \in [AN]$ (în caz contrar, $\frac{AC_1}{C_1B} > 1$, contradicție). Analog, $C_1 \in [AM]$. Notăm $\{D\} = BB_1 \cap MN$ și $\{E\} = CC_1 \cap MN$. Vom arăta că punctele D și E coincid.
Cum $[MN]$ ecte linie mijlocie în triunghiul ABC, rezultă că $[MN] \parallel [BC]$ și obținem că triunghiurile DB_1N și BB_1C sunt asemenea. Astfel obținem



$$\frac{DN}{BC} = \frac{B_1N}{B_1C} = \frac{AN - AB_1}{B_1C} = \frac{\frac{1}{2}AC - AB_1}{B_1C} = \frac{AC}{2\,B_1C} - \frac{AB_1}{B_1C}$$
$$= \frac{B_1C + AB_1}{2\,B_1C} - \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{1}{2} + \frac{AB_1}{2\,B_1C} - \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{1}{2} - \frac{AB_1}{2\,B_1C}.$$

Analogic se argumentează că triunghiurile EC_1M și CC_1B sunt asemenea. Astfel obținem

$$\frac{ME}{BC} = \frac{C_1M}{C_1B} = \frac{AM - AC_1}{C_1B} = \frac{\frac{1}{2}AB - AC_1}{C_1B} = \frac{AB}{2\,C_1B} - \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC_1 + C_1B}{2\,C_1B} - \frac{AC_1}{C_1B} =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{AC_1}{2\,C_1B} - \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{1}{2} - \frac{AC_1}{2\,C_1B}.$$

Ca urmare,

$$\frac{DN + EM}{BC} = \frac{DN}{BC} + \frac{EM}{BC} = \frac{1}{2} - \frac{AB_1}{2B_1C} + \frac{1}{2} - \frac{AC_1}{2C_1B} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{AC_1}{C_1B} + \frac{AB_1}{B_1C}\right) = \frac{1}{2}$$

și $DN + EM = \frac{BC}{2} = MN$. Cum punctele M, D, E, N sunt coliniare, rezultă că punctele D și E coincid, iar segmentele $[BB_1]$ și $[CC_1]$ se intersectează pe linia mijlocie $[MN]$.

8.8. Se consideră mulțimea $M = \{y | y = \frac{2x^2+5x+9}{2x+3}, x \in Q_+\}$. Să se determine mulțimea $M \cap Z$, unde Q_+ este mulțimea numerelor raționale nenegative, iar Z este mulțimea numerelor întregi.

Soluție. Cum $x \in Q_+$, atunci avem $x \geq 0$ și imediat se verifică că $y > 0$. Deci răspunsul poate conține doar numere naturale nenule, $M \cap Z \subseteq N^*$. Obținem

$$y = \frac{2x^2+5x+9}{2x+3} \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 9 = y(2x+3) \Leftrightarrow 2x^2 + (5-2y)x + 9 - 3y = 0. \qquad (2)$$

Rezolvăm această ecuație în x în raport cu parametrul $y \in N^*$, iar soluțiile le luăm în Q_+. Calculăm determinantul

$$\Delta = (5-2y)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (9-3y) = 4 \cdot y^2 + 4y - 47\,. \qquad (3)$$

Cum $y \in N^*$, atunci $\Delta \in Z$. Ecuația (2) are soluții raționale numai dacă determinantul Δ este pătrat perfect, adică există $k \in Z$ astfel încît $\Delta = 4 \cdot y^2 + 4y - 47 = k^2 \geq 0$ și soluțiile ecuației (2) se calculează conform formulelor cunoscute:

$$x_1 = \frac{-(5-2y)-k}{4}, \quad x_2 = \frac{-(5-2y)+k}{4}. \qquad (4)$$

Remarcăm că indiferent de faptul că k este pozitiv sau negativ fomulele (4) oferă aceleași soluții. Deci fără a restrânge generalitatea considerăm $k \in N$.

Prin verificare directă obținem că $\Delta < 0$ pentru $y \in \{0,1,2\}$, deci $y \geq 3$. Cum $y \in N^*$ și $k^2 = 4 \cdot y^2 + 4y - 47 = 4 \cdot (y^2 + y - 11) - 3$, rezultă k^2 este impar deci k este număr impar. Fie $k = 2h + 1$, $h \in N$. Atunci

$$\Delta = 4 \cdot y^2 + 4y - 47 = (2h+1)^2 \Leftrightarrow 4y(y+1) = 4h(h+1) + 48 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y(y+1) - h(h+1) = 12 \Leftrightarrow y^2 - h^2 + y - h = 12 \Leftrightarrow (y-h)(y+h+1) = 12.$$

Cum $y - h \in Z$, și $y + h + 1 \in Z$ rezultă că aceste numere sunt divizori a lui 12. Acești divizori nu pot fi simultan negativi, deoarece

$\begin{cases} y - h < 0, \\ y + h + 1 < 0. \end{cases} \Rightarrow 2y + 1 < 0 \Leftrightarrow y < -\frac{1}{2}$, contrazicere cu relația $y \geq 3$, obținută anterior. Astfel obținem că ambii divizori $y - h$, și $y + h + 1$ sunt pozitivi, deoarece $(y-h)(y+h+1) = 12$. Cum $y - h + y + h + 1 = 2y + 1$ este număr impar concluzionăm că $y - h$, și $y + h + 1$ au parități diferite. De asemenea dacă $y - h = 6$, atunci din $(y-h)(y+h+1) = 12$, obținem că și $y + h + 1 = 6$, contradicție cu parități diferite. Reciproc tot este adevărat: dacă $y + h + 1 = 6$, atunci și $y - h = 6$, contradicție. Deci nici unul dintre ei nu poate fi 6. Mulțimea divizorilor pozitivi a lui 12 este $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

Cum $y + h + 1 > y - h$ pentru $y \geq 3$ și $h \in N$, atunci $y + h + 1 \in \{4, 12\}$.

Avem doar două cazuri posibile:

1. $\begin{cases} y + h + 1 = 4 \\ y - h = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y + 1 = 7 \\ y - h = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ h = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x_1 = 0, \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

Deci $y = 3$ se obține pentru două numere raționale nenegative $x_1 = 0$ și $x_2 = \frac{1}{2}$.

2. $\begin{cases} y + h + 1 = 12 \\ y - h = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y + 1 = 13 \\ y - h = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ h = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ k = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ x_1 = -1, \\ x_2 = \frac{9}{2} \end{cases}$

Deci $y = 6$ se obține pentru un număr rațional nenegativ $x_2 = \frac{9}{2}$.

Răspuns $M \cap Z = \{3, 6\}$.