A 69-A OLIMPIADĂ REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
A doua zi, 01 martie 2026, Clasa a IX–a

BAREM DE EVALUARE

Remarcă. ***Rezolvarea corectă a oricărei probleme se apreciază cu 7 puncte.***

9.5. Determinați toate funcțiile $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$, care îndeplinește simultan condițiile:
1) $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $f(x+1) = f(x) + \frac{x}{1013}$, $(\forall) x \in \mathbb{N}$,
2) $f(2026) = 2027$.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Alegerea setului de numere $1; 2; 3; \dots; x-1$ pentru substituție.	1 punct
2.	Obținerea șirului de egalități $f(i) = f(i-1) + \frac{i-1}{1013}$, $i = \overline{2; x-1}$.	1 punct
3.	Adunarea membru cu membru a șirului de egalități și obținerea $1 + 2 + 3 + \dots + x - 1 = \frac{x\cdot(x-1)}{2}$.	1 punct
4.	Obținerea $f(x) = f(1) + \frac{1}{2026} \cdot x(x-1)$, $(\forall) x \in \mathbb{N}$.	1 punct
5.	Obținerea $f(1) = 2$.	1 punct
6.	Obținerea soluției unice $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{x(x-1)}{2026} + 2$.	1 punct
7.	Se verifică faptul că funcția f verifică condițiile 1) și 2).	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

9.6. În plan este dat un segment $[AB]$ și o dreaptă d, astfel încât $d \parallel AB, AB \neq d$. Se consideră toate triunghiurile posibile ABC, cu vârful $C \in d$. Găsiți locul geometric al centrelor cercurilor circumscrise tuturor acestor triunghiuri ABC.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Concluzia că locul geometric căutat al centrelor cercurilor circumscrise este o submulțime a mediatoarei l a segmentului $[AB]$.	1 punct
2.	Depunerea punctului O^* - centrul cercului circumscris triunghiului AKB, unde $\{K\} = l \cap d$.	1 punct
3.	Formularea ipotezei că locul geometric căutat al punctelor este semidreapta $[O^*K$.	1 punct
4.	Cercetarea mulțimii M a tuturor cercurilor care trec prin punctele A și B.	1 punct
5.	Cercetarea acelor cercuri din mulțimea M care au cu dreapta d exact două puncte comune.	1 punct
6.	Cercetarea acelor cercuri din mulțimea M care au cu dreapta d exact un punct comun.	1 punct
7.	Cercetarea acelor cercuri din mulțimea M care nu au cu dreapta d puncte comune și finalizarea demonstrației ipotezei formulate mai sus.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

9.7. Pe tablă este scrisă expresia: $\boxed{* n^8 * n^7 * n^6 * n^5 * n^4 * n^3 * n^2 * n}$. Doi copii, Nicu și Alina, joacă un joc. Ei, pe rând, , aleg un semn asterisc „$*$” și înlocuiesc (la dorință) cu unul dintre semnele „+” sau „-”. Nicu începe jocul. Dacă expresia finală se divide cu 6 pentru orice număr natural *n*, atunci câștigătoare este Alina, în caz contrar câștigător este Nicu. Arătați că Alina are o strategie de câștig, care îi asigură victoria, oricum ar juca Nicu.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Considerarea expresiei $n^5 - n$ și reprezentarea $n^5 - n = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$.	1 punct
2.	Obținerea $6\|(n^5 - n)$, pentru orice valoare naturală a lui *n*.	1 punct
3.	Reprezentarea $n^6 - n^2 = n(n^5 - n);\ n^7 - n^3 = n^2(n^5 - n);\ n^8 - n^4 = n^3(n^5 - n)$.	1 punct
4.	Obținerea $6\|(n^6 - n^2)$, $6\|(n^7 - n^3)$, $6\|(n^8 - n^4)$.	1 punct
5.	Obținerea $6\|(n^8 + n^7 + n^6 + n^5 - n^4 - n^3 - n^2 - n)$ și $6\|(-n^8 - n^7 - n^6 - n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n)$, pentru orice valoare naturală a lui *n*.	1 punct
6.	Enunțarea corectă a strategiei de joc pentru ca Alina să câștige.	2 puncte
	Punctaj total	7 puncte

9.8. Determinați toate perechile de numere naturale nenule (x, y), pentru care există numere naturale *n* și *m*, astfel încât $x^2 + x + 3 = y^n$ și $y^2 + y + 3 = x^m$.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Examinarea cazului $x = y$.	1 punct
2.	Examinarea cazului $x > y$ și reprezentarea $x = y + d,\ d \geq 1,\ d \in \mathbb{N}^*$.	1 punct
3.	Examinarea cazului $d = 1$.	1 punct
4.	Examinarea cazului $d \geq 2$ și obținerea soluției $(x, y) = (15,3)$.	3 puncte
5.	Examinarea cazului $x < y$ și obținerea soluției $(x, y) = (3,15)$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte