

69-Я РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
Второй день, 01 марта 2026 г., IX класс

СХЕМА ПРОВЕРКИ ТЕСТА

Примечание. Правильное решение любой задачи оценивается в 7 баллов.

9.5. Определите все функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, которые одновременно удовлетворяют условиям: 1) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, $f(x + 1) = f(x) + \frac{x}{1013}$, $(\forall)x \in \mathbb{N}$, 2) $f(2026) = 2027$.		
Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Выбор множества чисел $1; 2; 3; \dots; x - 1$ для подстановки.	1 балл
2.	Получение последовательности равенств $f(i) = f(i - 1) + \frac{i-1}{1013}$, $i = \overline{2; x - 1}$.	1 балл
3.	Почленное сложение равенств и получение $1 + 2 + 3 + \dots + x - 1 = \frac{x \cdot (x-1)}{2}$.	1 балл
4.	Получение $f(x) = f(1) + \frac{1}{2026} \cdot x(x - 1)$, $(\forall)x \in \mathbb{N}$.	1 балл
5.	Получение $f(1) = 2$.	1 балл
6.	Получение единственного решения $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{x(x-1)}{2026} + 2$.	1 балл
7.	Проверяется, что функция f удовлетворяет условиям 1) и 2).	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

9.6. В плоскости фиксированы отрезок $[AB]$ и прямая d ($d \parallel AB$, $AB \neq d$). Рассматриваются все возможные треугольники ABC , где точка $C \in d$. Найдите геометрическое место центров окружностей, описанных вокруг этих треугольников ABC .		
Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Вывод утверждения, что искомое геометрическое место точек есть подмножество медиатрисы l отрезка $[AB]$.	1 балл
2.	Построение точки O^* - центра описанной окружности вокруг треугольника AKB , где $\{K\} = l \cap d$.	1 балл
3.	Формулировка гипотезы, что искомое геометрическое место точек есть полупрямая $[O^*K$.	1 балл
4.	Исследование множества M всех окружностей, проходящих через точки A и B .	1 балл
5.	Исследование тех окружностей из M , которые имеют с прямой d ровно 2 общих точки.	1 балл

6.	Исследование тех окружностей из M , которые имеют с прямой d ровно 1 общую точку.	1 балл
7.	Исследование тех окружностей из M , которые не имеют с прямой d общих точек, и завершение доказательства сформулированной выше гипотезы.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

9.7. На доске записано выражение: $*n^8 * n^7 * n^6 * n^5 * n^4 * n^3 * n^2 * n$. Двое детей, Нику и Алина, играют в игру. Они по очереди выбирают какую-то звёздочку «*» и заменяют ее (по своему выбору) одним из знаков «+» или «-». Нику начинает игру. Если в конце получается выражение, делящееся на 6 при любом натуральном значении n , то выигрывает Алина; в противном случае побеждает Нику. Докажите, что Алина имеет выигрышную стратегию, которая обеспечит ей победу независимо от того, как играет Нику.

Решение со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Рассмотрение выражения $n^5 - n$ и его представление $n^5 - n = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$.	1 балл
2.	Получение $6 (n^5 - n)$, для любого натурального числа n .	1 балл
3.	Представление $n^6 - n^2 = n(n^5 - n)$; $n^7 - n^3 = n^2(n^5 - n)$; $n^8 - n^4 = n^3(n^5 - n)$.	1 балл
4.	Получение $6 (n^6 - n^2)$, $6 (n^7 - n^3)$, $6 (n^8 - n^4)$.	1 балл
5.	Получение $6 (n^8 + n^7 + n^6 + n^5 - n^4 - n^3 - n^2 - n)$ și $6 (-n^8 - n^7 - n^6 - n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n)$, для любого натурального числа n .	1 балл
6.	Правильное изложение стратегии для победы Алины.	2 балла
	Общее количество баллов	7 баллов

9.8. Найдите все пары ненулевых натуральных чисел (x, y) , для которых существуют такие натуральные числа n и m , что $x^2 + x + 3 = y^n$ и $y^2 + y + 3 = x^m$.

Решение со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Рассмотрение случая $x = y$.	1 балл
2.	Рассмотрение случая $x > y$ и представление $x = y + d$, $d \geq 1$, $d \in \mathbb{N}^*$.	1 балл
3.	Рассмотрение случая $d = 1$.	1 балл
4.	Рассмотрение случая $d \geq 2$ и получение решения $(x, y) = (15, 3)$.	3 балла
5.	Рассмотрение случая $x < y$ и получение решения $(x, y) = (3, 15)$.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов