A 69-A OLIMPIADĂ REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
Ziua a doua, 01 martie 2026, Clasa a IX–a
Soluții

9.5. Determinați toate funcțiile $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$, care verifică simultan condițiile:

1) $f(x+1) = f(x) + \frac{x}{1013}$, $(\forall) x \in \mathbb{N}$,

2) $f(2026) = 2027$.

Soluție:

În prima relație vom substitui succesiv x cu $1,2,3,\dots,x-1$. Obținem

$$f(2) = f(1) + \frac{1}{1013};\ f(3) = f(2) + \frac{2}{1013}; \dots; f(x) = f(x-1) + \frac{x-1}{1013}.$$

Adunând membru cu membru aceste egalități, obținem:

$$f(2) + f(3) + \ldots + f(x-1) + f(x) = f(1) + f(2) + \cdots + f(x-1) + \frac{1+2+3+\ldots+x-1}{1013} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = f(1) + \frac{1}{1013} \cdot \frac{1+(x-1)}{2} \cdot (x-1) \Leftrightarrow f(x) = f(1) + \frac{1}{2026} \cdot x(x-1),\ (\forall) x \in \mathbb{N}.$$

În particular, pentru $x = 2026$, obținem $f(2026) = f(1) + 2025 \Leftrightarrow f(1) = 2027 - 2025 = 2$.

Prin urmare, $f(x) = 2 + \frac{x(x-1)}{2026}$.

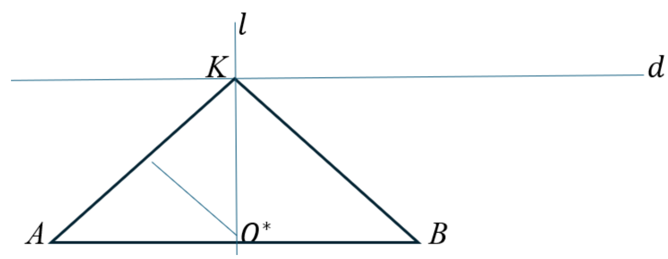
Prin verificare se confirmă că funcția *f* verifică condițiile.

Răspuns: $f(x) = 2 + \frac{x(x-1)}{2026}$, $(\forall) x \in \mathbb{N}$.

9.6. În plan este dat un segment $[AB]$ și o dreaptă d, astfel încât $d \parallel AB, AB \neq d$. Se consideră toate triunghiurile posibile *ABC*, cu vârful $C \in d$. Găsiți locul geometric al centrelor cercurilor circumscrise tuturor acestor triunghiuri *ABC*.

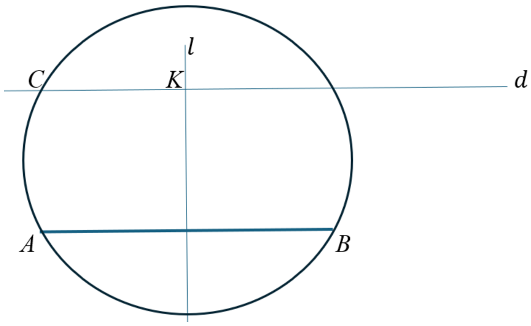
Soluție.

Deoarece centrul cercului circumscris unui triunghi este punctul de intersecție a mediatoarelor, atunci locul geometric căutat al centrelor cercurilor circumscrise este o submulțime a mediatoarei l a segmentului $[AB]$.

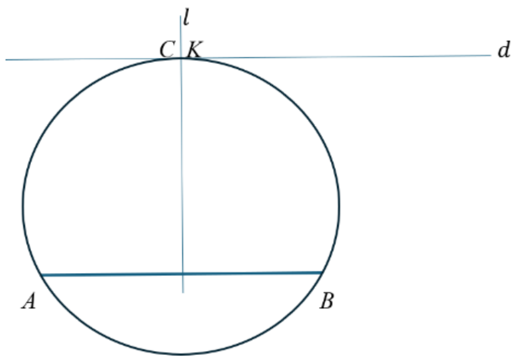


Fie $l \cap d = \{K\}$. Cercetăm triunghiul AKB (cazul $C = K$). Fie O^* centrul cercului circumscris triunghiului AKB . Atunci $O^* \in l$, mai exact $O^* \in [KD)$, unde D este mijlocul segmentului *AB*.

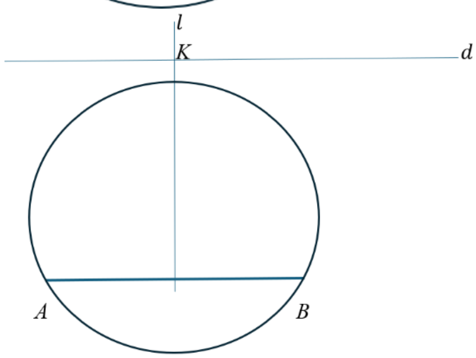
Ipoteză: locul geometric căutat al punctelor este semidreapta $[O^*K$ (semidreapta cu originea O^* și trece prin punctul $\{K\} = l \cap d$.



Construim toate cercurile posibile cu centrele pe mediatoarea , care trec prin punctele A și B. Punctele lor de intersecție cu dreapta d sunt locurile posibile ale vârfului C al triunghiului ABC. Prin urmare, pentru orice punct P al semidreptei $[O^*K$ este posibil de construit un vârf C al triunghiului ABC, astfel încât centrul cercului circumscris triunghiului ABC corespunzător să coincidă cu punctul P. Deoarece $m(\angle CAB) > m(\angle KAB)$, atunci centrul P al cercului circumscris va fi situat mai sus de punctul O^* pe mediatoarea l, atunci $P \in [O^*K$.



Punctul cel mai de „jos" al acestei semidrepte – punctul O^* se obține în cazul când d este tangentă la cercul circumscris triunghiului ABC.



Alte cercuri care trec prin punctele A și B, dar care nu au puncte comune cu dreapta d, nu le vom considera, deoarece triunghiul ABC nu va exista.

9.7. Pe tablă este scrisă expresia: $\boxed{* n^8 * n^7 * n^6 * n^5 * n^4 * n^3 * n^2 * n}$. Doi copii, Nicu și Alina, joacă un joc. Ei, pe rând, , aleg un semn asterisc „*" și înlocuiesc (la dorință) cu unul dintre semnele „+" sau „-". Nicu începe jocul. Dacă expresia finală se divide cu 6 pentru orice număr natural *n*, atunci câștigătoare este Alina, în caz contrar câștigător este Nicu. Arătați că Alina are o strategie de câștig, care îi asigură victoria, oricum ar juca Nicu.

Soluție:

Considerăm expresia $n^5 - n = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$. Această expresie conține produsul a trei numere naturale consecutive, deci este divizibilă cu 6, oricare ar fi numărul natural *n*. Grupăm termenii din expresie în patru perechi de forma (n^k, n^{k-4}), unde $k = 5, 6, 7, 8$. În fiecare pereche, diferența numerelor

$$n^k - n^{k-4} = n^{k-5}(n^5 - n) = n^{k-5}n(n-1)(n+1)(n^2+1)$$

este divizibilă cu 6, oricare ar fi numărul natural *n*.

Prin urmare și toată expresia finala se va divide cu 6, oricare ar fi numărul natural *n*. Următoarele expresii pot fi scrise:

$$n^6 - n^2 = n(n^5 - n);$$
$$n^7 - n^3 = n^2(n^5 - n);$$
$$n^8 - n^4 = n^3(n^5 - n).$$

Observăm că fiecare dintre aceste expresii sunt divizibile cu 6, pentru orice valoare naturală a lui *n*.

Atunci expresiile:

$$(n^8 + n^7 + n^6 + n^5 - n^4 - n^3 - n^2 - n) \text{ și } (-n^8 - n^7 - n^6 - n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n)$$

sunt divizibile cu 6, pentru orice valoare naturală a lui *n*.

Din cele menționate mai sus și rezultă strategia de câștig pentru Alina: dacă Nicu alege un termen n^m, $m = \overline{1;8}$ și îi pune în față un semn, fie „+” sau „-”, atunci Alina imediat alege al doilea termen din perechea respectivă și îi pune în față semnul opus: „-” sau, respectiv „+” (perechi de forma (n^k, n^{k-4}), unde $k = 5, 6, 7, 8$). Diferența acestor doi termeni oricând se va divide cu 6, oricare ar fi numărul natural *n*. Alina oricând poate realiza strategia sa, deoarece, în strategia Alinei, Nicu niciodată nu va putea alege două numere din aceeași pereche.

9.8. Determinați toate perechile de numere naturale nenule (x, y), pentru care există numere naturale *n* și *m*, astfel încât $x^2 + x + 3 = y^n$ și $y^2 + y + 3 = x^m$.

Soluție.

Fie (x, y) o astfel de pereche. Atunci

$$x^2 + x + 3 = y^n,$$
$$y^2 + y + 3 = x^m$$

pentru numerele naturale n și m. Evident, numerele n și m trebuie să fie nenule. Avem câ\teva cazuri.

1. *Cazul* $x = y$. Atunci

$$x^2 + x + 3 = x^n \iff 3 = x(x^{n-1} - x - 1).$$

Rezultă că numărul x este un divizor pozitiv al numărului 3, adică $x = 1$ sau $x = 3$. Dar ambele valori conduc la contradicții:

$$1^2 + 1 + 3 = 5 \neq 1^n,$$
$$3^2 + 3 + 3 = 15 \neq 3^n.$$

Prin urmare cazul, $x = y$ este imposibil.

2. *Cazul* $x \neq y$. Presupunem $x > y$ (analog $x < y$). Prin urmare

$$x = y + d,\ d \geq 1,\ d \in \mathbb{N}^*.$$

Vom considera câteva cazuri.

a) *Cazul* $d = 1$. Atunci $x = y + 1$ și

$$y^n = x^2 + x + 3 = (y + 1)^2 + (y + 1) + 3 = y^2 + 3y + 5,$$

adică

$$5 = y^n - y^2 - 3y = y(y^{n-1} - y - 3).$$

Atunci numărul y este un divizor pozitiv al numărului 5, adică $y = 1$ sau $y = 5$. Dar

$$y = 1 \;\Rightarrow\; x = 2 \;\Rightarrow\; 2^2 + 2 + 3 = 9 \neq 1^n,$$
$$y = 5 \;\Rightarrow\; x = 6 \;\Rightarrow\; 6^2 + 6 + 3 = 45 \neq 5^n,$$

adică cazul $d = 1$ este imposibil.

b) *Cazul* $d \geq 2$. Atunci $x = y + d$ (adică $x \geq 3$) și pentru $d \geq 2$ avem

$$x^2 = (y + d)^2 = y^2 + 2dy + d^2 = y^2 + y + 3 + y(2d - 1) + (d^2 - 3) > y^2 + y + 3 = x^m.$$

Rezultă că $0 < m < 2$, adică $m = 1$. Prin urmare,

$$y^2 + y + 3 = x = y + d \;\Longrightarrow\; d = y^2 + 3.$$

Pe lângă aceasta,

$$y^n = x^2 + x + 3 = (y + d)^2 + (y + d) + 3 = (y + y^2 + 3)^2 + (y + y^2 + 3) + 3 =$$
$$= y^4 + 2y^3 + 14y^2 + y + 15.$$

Prin urmare, y este un divizor pozitiv al numărului 15, adică $y \in \{1, 3, 5, 15\}$. Studiem fiecare caz: separat.

1. $y = 1 \;\Rightarrow\; d = 4 \;\Rightarrow\; x = 5 \;\Rightarrow\; 5^2 + 5 + 3 = 33 \neq 1^n,$
2. $y = 5 \;\Rightarrow\; d = 28 \;\Rightarrow\; x = 33 \;\Rightarrow\; 33^2 + 33 + 3 = 1125 \neq 5^n,$
3. $y = 15 \;\Rightarrow\; d = 228 \;\Rightarrow\; x = 243 \;\Rightarrow\; 243^2 + 243 + 3 = 59295 \neq 15^n,$
4. $y = 3 \;\Rightarrow\; d = 12 \;\Rightarrow\; x = 15 \;\Rightarrow\; 15^2 + 15 + 3 = 243 = 3^5,$

$$3^2 + 3 + 3 = 15^1,$$

adică $n = 5$ și $m = 1$.

Răspuns: $(x, y) = (15,3)$ (pentru $n = 5$ și $m = 1$) sau $(x, y) = (3,15)$ (pentru $n = 1$ și $m = 5$).