

69-Я РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Второй день, 01 марта 2026 г., IX класс

9.5. Определите все функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, которые одновременно удовлетворяют условиям:

1) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}, f(x+1) = f(x) + \frac{x}{1013}, (\forall)x \in \mathbb{N},$

2) $f(2026) = 2027.$

9.6. В плоскости фиксированы отрезок $[AB]$ и прямая $d (d \parallel AB, AB \neq d)$. Рассматриваются все возможные треугольники ABC , где точка $C \in d$. Найдите геометрическое место центров окружностей, описанных вокруг этих треугольников ABC .

9.7. На доске записано выражение: $*n^8 * n^7 * n^6 * n^5 * n^4 * n^3 * n^2 * n$. Двое детей, Нику и Алина, играют в игру. Они по очереди выбирают какую-то звёздочку «*» и заменяют ее (по своему выбору) одним из знаков «+» или «-». Нику начинает игру. Если в конце получается выражение, делящееся на 6 при любом натуральном значении n , то выигрывает Алина; в противном случае побеждает Нику. Докажите, что Алина имеет выигрышную стратегию, которая обеспечит ей победу независимо от того, как играет Нику.

9.8. Найдите все пары ненулевых натуральных чисел (x, y) , для которых существуют такие натуральные числа n и m , что $x^2 + x + 3 = y^n$ и $y^2 + y + 3 = x^m$.

Время работы: 240 минут.

Правильное решение любой задачи оценивается в 7 баллов. ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!

69-Я РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Второй день, 01 марта 2026 г., IX класс

9.5. Определите все функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, которые одновременно удовлетворяют условиям:

1) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}, f(x+1) = f(x) + \frac{x}{1013}, (\forall)x \in \mathbb{N},$

2) $f(2026) = 2027.$

9.6. В плоскости фиксированы отрезок $[AB]$ и прямая $d (d \parallel AB, AB \neq d)$. Рассматриваются все возможные треугольники ABC , где точка $C \in d$. Найдите геометрическое место центров окружностей, описанных вокруг этих треугольников ABC .

9.7. На доске записано выражение: $*n^8 * n^7 * n^6 * n^5 * n^4 * n^3 * n^2 * n$. Двое детей, Нику и Алина, играют в игру. Они по очереди выбирают какую-то звёздочку «*» и заменяют ее (по своему выбору) одним из знаков «+» или «-». Нику начинает игру. Если в конце получается выражение, делящееся на 6 при любом натуральном значении n , то выигрывает Алина; в противном случае побеждает Нику. Докажите, что Алина имеет выигрышную стратегию, которая обеспечит ей победу независимо от того, как играет Нику.

9.8. Найдите все пары ненулевых натуральных чисел (x, y) , для которых существуют такие натуральные числа n и m , что $x^2 + x + 3 = y^n$ и $y^2 + y + 3 = x^m$.

Время работы: 240 минут.

Правильное решение любой задачи оценивается в 7 баллов. ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!